UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL- PROFMAT.

MARCEL BRITO SOARES

O ENSINO DE PROBABILIDADE NO 8º ANO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

ABAETETUBA – PARÁ
2021

MARCEL BRITO SOARES

O ENSINO DE PROBABILIDADE NO 8º ANO
POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Dissertação para apresentação como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, sob a orientação do Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa.

ABAETETUBA – PARÁ
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S676e Soares, Marcel Brito.
O ENSINO DE PROBABILIDADE NO 8º ANO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS / Marcel Brito Soares. — 2021.
93 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2021.

1. Ensino. . 2. Ensino de Matemática. . 3. Ensino de Matemática por Atividades. . 4. Ensino de Probabilidade por Atividades.. I. Título.

CDD 510

MARCEL BRITO SOARES

O ENSINO DE PROBABILIDADE NO 8º ANO
POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS.

Dissertação de Mestrado para ser apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT-IMPA), do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa.

APROVADO em: 15 de Dezembro de 2021.

Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa
Professor Orientador (Presidente/PROFMAT)

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Membro Titular Interno (PROFMAT)

Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros
Membro Titular Interno (PROFMAT)

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Membro Titular Externo (UFPA)

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Membro Titular Externo(UEPA)

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por me conceder saúde, força e fé para seguir firme nessa caminhada. Obrigado senhor!

Aos meus pais Nilton Soares (em memória) e minha mãe Domingas Brito, que sempre me incentivaram e apoiaram meus estudos, amo vocês e obrigado por tudo.

Aos meus irmãos e irmãs e suas famílias, obrigado pelo incentivo e pelos bons momentos quando estamos juntos. Amo vocês.

A minha esposa Lauriene Lobato e ao meu filho Yan Soares, que sempre me apoiaram nos momentos difíceis, obrigado pela compreensão, paciência e pelo amor e carinho. Amo vocês!

Ao meu orientador Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa, pelas orientações, ensinamentos, sugestões e pela compreensão e amizade durante a realização deste trabalho.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, pela qualidade da formação recebida no decorrer do curso.

Aos docentes Renato Fabrício Costa Lobato, José Francisco da Silva Costa, Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, Manoel Jeremias dos Santos e Aubedir Seixas Costas que, com seus conhecimentos, contribuíram com uma formação de qualidade nas disciplinas. Agradeço por tudo aquilo que aprendi durante o período do curso.

Aos amigos da turma de 2019, especialmente, Dilson Martins do Nascimento, Nélio Santos Nahum, Ivanilton Pedro Lobato dos Santos e Tonival de Sarges Costa por compartilharem conhecimentos e momentos de descontração.

A todos os amigos não especificados, que compartilham comigo momentos de felicidades e de adversidades, obrigado pelo apoio e amizade.

Enfim, a todos que me apoiaram de alguma forma para a realização deste trabalho. Muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma sequência didática para o ensino de probabilidade por meio de Atividades Experimentais com uma abordagem sobre os aspectos conceituais e sobre a resolução de questões envolvendo o assunto, com o intuito de favorecer a participação dos alunos em aulas de matemática e o aprendizado dos conceitos presentes em cada atividade. A fundamentação teórica serviu de base para a “construção” da sequência didática que foi adaptada da dissertação do autor, baseada no Ensino de Matemática por Atividades. A sequência é composta por cinco atividades que contemplam as diferenças de experimentos determinísticos e aleatórios, os conceitos de espaço amostral e eventos, a definição clássica de probabilidade e o intervalo de variação da probabilidade. A sequência poderá ser aplicada no 8º ano do Ensino Fundamental.

Palavras-chaves: Ensino. Ensino de Matemática. Ensino de Matemática por Atividades. Ensino de Probabilidade por Atividades.

ABSTRACT

This work aims to present a didactic sequence for teaching probability through experimental activities with an approach to conceptual aspects and to the resolution of issues involving the subject, in order to favor the participation of students in mathematics and learning the concepts present in each activity. The theoretical foundation served as the basis for the “construction” of the didactic sequence that was adapted from the author's dissertation, based on the Teaching of Mathematics by Activities. The sequence consists of five activities that address the differences between deterministic and random experiments, the concepts of sample space and events, the classical definition of probability and the probability variation range. The sequence can be applied in the 8th year of Elementary School.

Keywords: Teaching. Didatic Engineering. Teaching of Mathematics. Teaching of Mathematics by Activities. Teaching of Probability by Activities

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conhecimento matemático é importante para o desenvolvimento pessoal, profissional e acadêmico dos estudantes, à vista disso, temos a Probabilidade, que estuda a incerteza proveniente de eventos não determinísticos e o aprendizado de seus conceitos e propriedades é fundamental para que no futuro tenhamos cidadãos mais atuantes na sociedade. Neste sentido, é essencial colaborar com o processo de ensino-aprendizagem destes eventos por meio da pesquisa por métodos que favoreçam a aprendizagem dos educandos e proporcione aos docentes da Educação Básica mais uma opção metodológica para o ensino deste objeto matemático.

A Teoria da Probabilidade é uma das áreas mais relevantes da matemática, foi desenvolvida a partir das ideias envolvendo jogos, mas no decorrer dos tempos tornou-se imprescindível em várias ciências como meteorologia, economia, ciências médicas, ciências naturais, ciências Humanas, dentre outras, como uma ferramenta de compreensão e análise de resultados, contribuindo para a modelagem de situações envolvendo o acaso, auxiliando na tomada de decisão em várias situações que exijam das pessoas uma melhor compreensão do mundo.

Neste seguimento, é indispensável o ensino e aprendizagem das regras básicas de probabilidade para nossos estudantes, desde o Ensino Fundamental, pois agregará aos mesmos uma visão de mundo não determinística, favorecendo o desenvolvimento cognitivo o raciocínio lógico e dedutivo dos estudantes. Por conseguinte, documentos oficiais como os PCN's e a BNCC regulamentam o estudo da probabilidade desde os primeiros anos de escolaridade. De acordo com os (PCN's) estudos relativos às noções de Estatística e de Probabilidade, trazem como principal finalidade:

> [...] que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços amostrais equiprováveis). (BRASIL,1998, p.52).

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática para o ensino de Probabilidade por meio de Atividades Experimentais, enfatizando os aspectos conceituais e a resolução de questões envolvendo o assunto, com o intuito de favorecer a participação dos alunos em aulas de matemática e o aprendizado dos conceitos presentes em cada atividade.

Na perspectiva de alcançar os objetivos do trabalho, o mesmo está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1, no tópico Fundamentação Teórica, realizamos uma investigação com o intuito de analisar as recomendações sobre ensino de probabilidade nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (PCN's), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Documento Curricular do Estado do Pará, as matrizes do o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e uma revisão de três trabalhos sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade; um estudo sobre um pouco da história da Probabilidade de Gerolamo Cardano a Jakob Bernoulli e sobre o Ensino de matemática por Atividades por Atividades Experimentais.

O capítulo 2 trata de um estudo sobre os conceitos básicos de probabilidade, desde experimentos aleatórios e determinísticos, espaço amostral e eventos, operações entre eventos, as interpretações clássica, frequentista e subjetiva de probabilidade e a definição axiomática da probabilidade mostrando a validade das interpretações citadas acima com as regras básicas de probabilidade. Temos ainda, a probabilidade condicional e a probabilidade dos eventos independentes com suas regras e propriedades específicas.

O capítulo 3, teve como objetivo a elaboração e análise de uma sequência didática com o intuito de desenvolver habilidades de registro, leitura e interpretação de informações; de identificação de conhecimentos matemáticos; construções de enunciados e procedimentos relativos ao conhecimento em estudo. Esta sequência didática foi adaptada da dissertação de Soares (2018), validada e aprovada, para ser aplicada em uma turma do 8º ano do ensino fundamental, de acordo com as recomendações dos (PCN's) e da (BNCC) para o ensino de probabilidade.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre a Probabilidade no Currículo da Educação Básica com a análise dos PCN´s do Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC,2020), o Documento Curricular do Estado do Pará e sobre as matrizes do o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Em seguida, exporemos três Estudos sobre o Ensino de Probabilidade, um pouco da História da Probabilidade, Conceitos Básicos de Probabilidade e o Ensino de Matemática por Atividades Experimentais.

1.1 Probabilidade No Currículo

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN`s) estão divididos em oito áreas de conhecimento. Cada área apresenta uma exposição da concepção da área, definição dos objetivos de cada área, critério de avaliação e orientações didáticas. No ensino fundamental, os objetivos e conteúdo de cada área, estão divididos em ciclos de ensino. Em relação à Matemática, os PCN`s, estão divididos em quatro ciclos, formados por duas séries (anos) cada um.

Os PCN`s específicos da área da matemática, tratam os conteúdos de cada ciclo divididos em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Neste trabalho, apresentaremos os objetivos e conteúdo específicos para os terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, relacionados ao ensino e a aprendizagem da Probabilidade que fazem parte do bloco Tratamento da informação.

O terceiro Ciclo, sugere a exploração de situações de aprendizagem com objetivo para o desenvolvimento do:

> Raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> Coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas;
> Resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão. (BRASIL,1998, p.65).

De acordo com os PCN'S (Brasil, 1998, p. 70), neste ciclo ampliam-se os estudos em relação às possibilidades de se quantificar os acontecimentos envolvendo a incerteza de eventos não determinísticos, a partir do estudo das noções elementares de Probabilidade, por meio da exploração de situações envolvendo moedas, dados e cartas, os estudantes aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos. Percebendo dessa forma a importância da Matemática para fazer previsões e da Probabilidade na vida cotidiana.

Neste ciclo, os PCN`s, no que tange aos conceitos e procedimentos, no tópico Tratamento da Informação, temos:

> Coleta, organização de dados e utilização de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões.
> Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos.
> Compreensão do significado da média aritmética como um indicador da tendência de uma pesquisa.
> Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.
> Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão. (BRASIL,1998, p.74).

Neste ciclo, destacamos para a abordagem da Probabilidade por meio da construção do espaço amostral e do cálculo da probabilidade pelo uso de uma razão, ou seja, a Probabilidade Clássica.

No quarto ciclo, os PCN's trazem para o ensino e aprendizagem em Estatística e Probabilidade, no tópico Tratamento da Informação, que os estudantes explorem situações de aprendizagem que os levem a:

> Construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos;
> Construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (BRASIL,1998, p.82).

De acordo com os PCN's (Brasil, 1998, p. 86) “o estudo da probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático”. Destacando o tratamento da Probabilidade, utilizando princípio multiplicativo ou simulações, para calcular a probabilidade de um evento, construindo o espaço amostral e estimando a probabilidade por meio de uma razão.

Neste ciclo, nos conceitos e procedimentos, temos os seguintes objetivos recomendados pelos PCN`s relacionados ao ensino da Probabilidade:

> Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
> Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas. (BRASIL,1998, p.90).

Por conseguinte, em (2018) foi homologada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que surgiu com o objetivo de alavancar a educação básica do nosso país. Está dividida em quatro áreas de conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências Humanas e Ciências da Natureza. Cada área é composta por seus respectivos componentes curriculares integrantes entre si e, entre os componentes curriculares de outras áreas.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2020, p. 265) “o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais”. Neste sentido, o Ensino Fundamental deve estar comprometido com o desenvolvimento do letramento matemático, ou seja, as competências e habilidades do raciocínio, das representações, da comunicação e argumentação matemática. Instigando os estudantes ao gosto pela matemática.

Assim, a área de Matemática, com seu componente curricular de Matemática, devem assegurar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades e competências específicas para o Ensino Fundamental, listadas abaixo:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordam, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2020, p. 267).

Nessa direção, a BNCC (Brasil, 2020, p.269), apresenta cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, pertinentes, que direcionam para a formulação de habilidades a serem desenvolvidas no decorrer do Ensino Fundamental.

A unidade temática Probabilidade e Estatística, contém o estudo da incerteza e o tratamento de dados, sendo um dos propósitos o estudo de conceitos e propriedades da probabilidade, considerando acontecimentos do cotidiano das pessoas, das ciências e da tecnologia. No que tange ao estudo da Probabilidade, para o Ensino Fundamental, a finalidade é:

> [...] promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental –Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2020, p. 274)

Assim, a BNCC (Brasil, 2020) na unidade temática Probabilidade e Estatística, estabelece que os conceitos de Probabilidade devem ser tratados desde os primeiros anos de escolaridade, considerando os conhecimentos prévios dos estudantes, suas experiências de vida, enfatizando as noções de aleatoriedade. Já, nos anos finais, os estudantes devem aprofundar seus conhecimentos, por meio do estudo dos conceitos e propriedades da Probabilidade.

Desta feita, apresentamos a seguir os Objetos de Conhecimento e Habilidades do 8º ano sobre o ensino e aprendizagem da Probabilidade, segundo a BNCC:

- Objetos de Conhecimentos e habilidades – 8º ANO

  Objetos de conhecimento

- Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral

  Habilidades

- (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Após a homologação da BNCC, está passou a ser o documento oficial para direcionar a construção dos currículos estaduais do nosso país, assim, em 2018 foi homologado o Documento Curricular do Estado do Pará, passando a ser mais um documento oficial que orienta a organização curricular do Estado do Pará. Neste documento, o nosso objeto de estudo está inserido no eixo Valores à Vida Social que traz como sub eixo O Diálogo da Matemática com a Vida. Assim:

Objetivos de aprendizagem

- Aplicar o conhecimento probabilístico e estatístico na elaboração de situações problemas que abordem sobretudo, questões sociais

  Habilidades

- (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Nesta vertente, temos também o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) com suas avaliações em larga escala, aplicadas nas escolas das redes Públicas do nosso país. Para o componente curricular Matemática, as matrizes de referência trazem o assunto Probabilidade no tema III Números e Operações/Álgebra e Funções com seu descritor D33 Calcular probabilidade de um evento. Vale ressaltar que este descritor pertence ao 3º ano do Ensino Médio e que para os 5º e 9º anos as matrizes não abordam em nenhum dos temas descritores direcionados para o ensino dos conceitos probabilísticos.

Desse modo, percebemos que o objeto de conhecimento Probabilidade com suas respectivas habilidades, estão inseridos nos documentos oficiais de nosso país, desde os primeiros anos de escolarização, para que possa ser trabalhado nas aulas de matemática, contribuindo com a formação social e profissional dos estudantes. A seguir, veremos alguns estudos sobre o ensino de probabilidade.

1.2 Estudos Sobre O Ensino De Probabilidade.

Com o objetivo de obter informações necessárias para o desenvolvimento e construção da sequência didática, realizamos um estudo de alguns trabalhos analisando seus enfoques teóricos e metodológicos.

O trabalho de Soares (2018), com o título: “O Ensino de Probabilidade por meio de Atividades” teve como objetivo geral “avaliar os efeitos de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de Probabilidade por meio de atividades”, e seus objetivos específicos foram:

> 1) Avaliar a participação de alunos de uma turma de 2º ano de uma escola pública de Abaetetuba em aulas de matemática sobre os aspectos conceituais de probabilidade durante o desenvolvimento de uma sequência didática diferente da tradicional; 2) Avaliar os efeitos do desenvolvimento de uma sequência didática, diferente da tradicional, sobre desempenho de alunos de uma turma do ensino Médio de uma escola pública de Abaetetuba da resolução de questões sobre probabilidade. (SOARES, 2018, P.25).

A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia didática, “que pressupõe a aplicação sistematizada de métodos que associem teoria e experiência da pesquisa em didática da matemática” dividida em quatro etapas: Análises prévias; concepção e analise a priori das situações didáticas da engenharia**;** experimentação e análise a posteriori e validação.

A metodologia de ensino utilizada na pesquisa foi “O Ensino de Matemática por Atividades”, que objetivou proporcionar aos discentes participantes da pesquisa momentos de construção de conhecimentos, por meio da redescoberta de conceitos e propriedades da probabilidade trabalhados em uma sequência didática composta por 12 atividades estruturadas e organizadas para o Ensino Médio e, foi aplicada em uma escola Pública de Abaetetuba-PA, para 20 alunos do 2º ano do ensino médio.

Os resultados obtidos mostraram que a sequência didática estruturada e baseada no ensino de matemática por atividades surtiu um efeito positivo na participação e no desempenho dos discentes na resolução de questões, verificado por meio do preenchimento dos quadros contidos em cada atividade, que propiciou aos discentes interação, percepção dos conhecimentos, bem como sistematização dos objetivos trabalhados em cada atividade.

A participação e o desempenho dos estudantes também foi verificado por meio da aplicação de um Pré-teste e um Pós-teste aplicado na experimentação. Esses dados foram sistematizado por meio de gráficos, tabelas e quadros contendo a porcentagem dos participantes em cada atividade. A correlação das notas do pré-teste e do pós-teste apresentou significativa melhora no desempenho dos estudantes, constatado ainda pelo resultado do teste de hipótese feito pelo autor para mostrar estatisticamente a contribuição da sequência didática no aprendizado dos discentes.

Em Bezerra (2016) “O conceito e o Ensino de Probabilidade nos 8º e 9º anos: análise e sugestões” teve como objetivo geral:

> [...] Contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, em particular, o ensino de Probabilidade nos 8º e 9º anos do ensino fundamental II, tendo a meta de desenvolver uma proposta metodológica, que esteja de acordo com os PCN’s e a BNCC, sempre com foco na produção de material adicional didático para o professor. (BEZERRA, 2016, p. 4)

E, como objetivos específicos:

> Analisar os referenciais da educação básica, apresentando os objetivos e recomendações para o ensino da Probabilidade.
> Verificar se os livros didáticos do ensino fundamental abordam o tema.
> Analisar como é abordado o conteúdo da Probabilidade em livros didáticos.
> Desenvolver uma proposta metodológica para o ensino da Probabilidade, que esteja de acordo com os PCN’s e a BNCC. Focalizando a produção de material didático adicional para o professor.
> Contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, em particular, para o ensino da Probabilidade.
> Despertar no aluno o prazer de estudar a matéria Matemática. (BEZERRA, 2016, 2016, p. 4 e 5).

A pesquisa fundamentou-se na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9394, de 20/12/1996 com suas normas legais e na análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s) e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC). Analisou as características comuns entre os (PCN’s) e a (BNCC), destacando de forma crítica e construtiva as distinções existentes nos objetivos específicos sobre o ensino da Probabilidade nos anos iniciais e finais do ensino fundamental.

Bezerra(2016), analisou seis livros didáticos do ensino fundamental, sendo três do fundamental I e três do ensino fundamental II, baseando-se nos fundamentos de análise de livros didáticos segundo Lima(2001), considerou três aspectos importantes: conceituação, manipulação e aplicação. Contribuiu de forma crítica e com sugestões sobre melhorias nas apresentações dos conceitos e sobre a linguagem probabilística contida nos enunciados das questões de fixação. Enfatizou sobre os aspectos positivos, concordando e elogiando tópicos apresentados nos livros, comparando a proposta apresentada pelos PCN's com os da BNCC.

Bezerra(2016), elaborou uma sequência didática, com base nas ideias de Chevallard (1991), contendo quatro atividades estruturadas por material concreto como: cubos; plásticos adesivos com quatro cores diferentes; bolas plásticas de isopor e urnas de papelão. Além do material, a sequência continha questionários com perguntas abertas, sobre os conceitos e propriedades da Probabilidade e um teste de verificação de desempenho para ser aplicado ao final das atividades.

Os resultados obtidos mostraram que a sequência didática surtiu efeito positivo no aprendizado dos estudantes, constatado pela participação dos discentes durante a experimentação: interagindo, questionando, tomando decisões de forma individual e em grupos, etc. Além do aumento na verificação da média da turma indicado no exercício de verificação do desempenho proposto pela sequência didática.

No tocante aos livros didáticos, Bezzera (2016), concluiu que, de alguns livros analisados, os do Ensino Fundamental I abordam a probabilidade de acordo com os PCN's e a BNCC. Entretanto, os do Ensino Fundamental II, poderiam apresentar termos menos técnicos para favorecer o aprendizado dos educandos. Contudo, os livros analisados cumprem seu papel, com alguns detalhes observados e que podem ser melhorados.

No trabalho de Souza (2019), "Sala de aula Invertida: Uma Proposta para o Ensino de Probabilidade", cujo objetivo específico foi:

> Promover estudos e pesquisas sobre a Sala de Aula Invertida e sobre Probabilidade;
> Pesquisar sobre os desafios encontrados no ensino e na aprendizagem da Probabilidade;
> Investigar recursos pedagógicos que possibilitem o ensino e aprendizagem da Probabilidade;
> Analisar o impacto de atividades realizadas no desempenho e na participação dos alunos visando avaliar e aperfeiçoar a metodologia aplicada;
> Analisar como a metodologia aplicada pode contribuir para a superação das dificuldades de aprendizagem de Probabilidade, visando o aperfeiçoamento de trabalhos futuros. (SOUZA, 2019, p. 19 e 20).

A metodologia de pesquisa utilizada foi a metodologia ativa, no caso a Sala de aula Invertida que é uma subcategoria do Ensino Híbrido em que o estudante aprende parte dos conteúdos de forma on-line e parte de forma presencial, de acordo com os critérios e características desta metodologia.

Souza (2019), fez uma análise curricular de cunho nacional por meio da BNCC e PCN's, e estadual por meio do Currículo Mínimo de Ensino do Rio de Janeiro (SEEDUC,2011) para verificar de que forma estes documentos abordam o tema Probabilidade na educação básica. Fez, ainda, um estudo sobre a história da probabilidade, desde as civilizações primitivas até o desenvolvimento sistemático da teoria descrevendo a biografia de grandes matemáticos que contribuíram para a evolução e do desenvolvimento da teoria Probabilística no decorrer dos séculos.

Com base na análise curricular, e numa revisão de literatura em livros, dissertações e artigos com o objetivo de analisar como estava sendo abordado o conteúdo Probabilidade, Souza(2019) elaborou uma sequência didática composta por atividades on-line, utilizando vídeos aulas sobre os conceitos e propriedades da Probabilidade e, para os momentos presenciais, testes para verificação da aprendizagem, atividades individuais e em grupos com a finalidade de abordar os conceitos trabalhados nas aulas não presenciais.

Os resultados obtidos, mostraram que uma sequência didática que utilize a Sala de aula invertida pode contribuir de forma positiva para o ensino de Probabilidade, constatado pela participação ativa dos estudantes nos momentos presenciais, no preenchimento dos questionários das atividades, dos testes individuais, das atividades em grupos, etc. Contribuindo para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Ademais, de acordo com Souza(2019), as vídeo aulas favoreceram de forma significativa para ensino e aprendizagem dos conceitos Probabilísticos tratados na pesquisa e que as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) são uma ferramenta importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática na educação Básica, auxiliando o professor mediador para o ensino dos diferentes objetos matemáticos importantes para o sucesso acadêmico dos estudantes. A seguir, veremos um pouco da história da probabilidade.

1.3 Um Pouco da História da Probabilidade: de Geloramo Cardano a Jakob Bernoulli.

Nesta seção apresentaremos uma síntese da origem da história da probabilidade e em seguida algumas contribuições matemáticas para a evolução do tema em estudo, enfatizando alguns matemáticos como: Cardano, Fermat, Pascal, Huygens e Jakob Bernoulli.

Segundo Gadelha (2004) a História da Probabilidade passou a ser evidenciada por volta de 3500 a.C. por meio de pinturas em tumbas egípcias que mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados. Esse dado era feito do osso do calcanhar e recebia o nome de *astrágalos*. Cada astrágalo possui 6 lados, porém somente quatro eram estáveis e permitiam que o osso se apoiasse sobre ele e a probabilidade de ocorrência para dois dos lados, segundo estudiosos modernos, é de 10% e de 40% para os outros dois. Já a origem do baralho é incerta, porém a certeza que se tem é que o baralho moderno surgiu na França no século XIV. Contudo, documentos arqueológicos ou históricos mostram a presença dos jogos de azar em quase todas as civilizações.

Os primeiros trabalhos mais importantes sobre probabilidade foram de Gerolamo Cardano (1501- 1576) e Niccolo Tartaglia (1499- 1557). Cardano nasceu na cidade Italiana Pavia, em 24 de setembro de 1501, foi um renomado médico de Milão do século XVI, tinha aptidão para estudar e deixou importantes trabalhos em matemática. Era um jogador que usava seus conhecimentos matemáticos para se beneficiar de jogos de azar e apostas, mas nem sempre obtivera êxito. Escreveu um estudo sobre apostas com o título "*Liber de Ludo Aleae"* (Livro de Jogos de Azar), no qual define a probabilidade de um evento como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis de o evento ocorrer (MORAES, 2014, p. 5, 6).

Em 1654 iniciaram a troca de correspondências entre Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623- 1662) estabelecendo, assim, um método sistemático para calcular probabilidade.

De acordo com Gadelha (2004), Fermat era advogado e matemático francês que nasceu em Beaumont-de-Lomagne em 17 de agosto de 1601 e que contribuiu notavelmente nos campos da teoria dos números e da probabilidade. Dentre suas contribuições destaca-se o Último Teorema de Fermat que foi demonstrado por Andrew Wiles em 1993, 356 anos após ser proposto por Fermat.

As correspondências de Fermat e Pascal, num total de 7 cartas, iniciaram a partir de um problema apresentado a Pascal por Chevalier de Méré, um intelectual francês admirador de jogos de azar, que havia sido proposto em 1494 pelo monge Paccioli. Tais correspondências foram publicadas em 1679, em Toulouse e, atualmente, são apontadas como o começo do desenvolvimento da teoria matemática da probabilidade.

O problema de Paccioli, denominado como o problema dos pontos, constitui-se em determinar qual deve ser a divisão do dinheiro da aposta quando um jogo é parado antes do final. Para exemplificarmos essa situação, suponhamos uma disputa entre dois competidores, na qual vence o primeiro jogador que alcançar 6 pontos. Partindo da hipótese de que ambos tenham a mesma habilidade no jogo, como deveria ser dividido o prêmio se a partida for paralisada quando um dos jogadores tiver 5 pontos e o outro 3.

Este problema consiste em calcular a probabilidade de um dos jogares ganhar a partida. Apresentaremos a seguir uma solução do problema segundo Moraes (2014) e em seguida sua generalização obtida por Pascal.

Solução similar à de Pascal segundo Moraes (2014):

Inicialmente Pascal analisa a situação:

Jogador A:

V	V	V	V	V	

Jogador B:

V	V	V			

Pascal concluiu que:

Jogador A:

V	V	V	V	V	V

Jogador B:

V	V	V	V	V	

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, x\, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, x\, \frac{1}{2}\, x\, \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

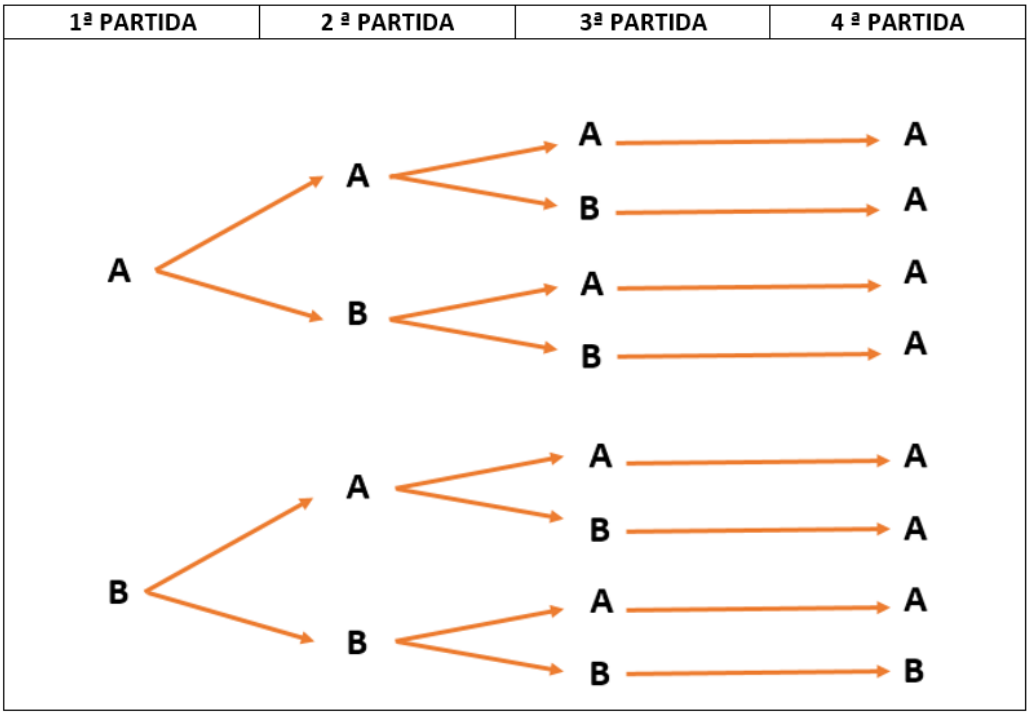
O Jogador A recebe $\frac{7}{8}$ das apostas.

O Jogador B recebe $\frac{1}{8}$ das apostas.

A seguir, na figura 1, temos a solução similar à de Fermat segundo Moraes (2014):

Fermat analisa a seguinte situação:

Figura 1: Diagrama de ávore da solução similar à de Fermat



Fonte: Acervo do Autor.

Fermat concluiu que:

O Jogador A recebe $\frac{7}{8}$ das apostas.

O Jogador B recebe $\frac{1}{8}$ das apostas.

De acordo com Gadelha (2004), baseando-se na hipótese de um número finito de resultados e de eventos equiprováveis, além do auxílio da análise combinatória por intermédio do triângulo aritmético, Pascal confirmou a solução do problema de Paccioli, cujo prêmio deve ser dividido na seguinte proporção.

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{(m+n-1\ 0) + \cdots + (m+n-1\ n-1)}{(m+n-1\ 0) + \cdots + (m+n-1\ m-1)}$$

onde se tem que, para o jogador A, faltam m pontos para ganhar, enquanto que para o jogador B faltam n pontos.

A teoria da probabilidade teve sua primeira publicação em 1657 no livro de Christiaan Huygens (1629- 1695) intitulado *De Ratiociniis in Aleae Ludo* (Sobre os Cálculos em Jogos de Azar). Huygens foi matemático, físico e astrônomo nasceu no dia 14 de abril de 1629, em Haia, Holanda. Fez contribuições importantes à Astronomia, à ótica e à teoria ondulatória da luz. Em 1655 descobriu a primeira lua de Saturno e, neste mesmo ano, fez sua primeira visita a Paris onde tomou conhecimento das cartas de Fermat e Pascal e dos problemas de probabilidade por eles investigados.

Sem ter conhecimento dos resultados de Pascal e Fermat, resolveu 14 problemas de jogos de azar, sem usar análise combinatória. Huygens foi o primeiro a introduzir o importante conceito de "esperança matemática": se **p** indica a probabilidade de que uma pessoa ganhe uma certa soma **s**, então **sp** se denomina esperança matemática. Mostrou ainda, entre outras coisas, que se **p** é a probabilidade de uma pessoa ganhar uma soma **a** e **q** é a de ganhar uma soma **b,** então **ap+bq** é seu ganho esperado. (EVES, 2004, p. 398; GADELHA, 2004, p. 5)

Outro matemático importante para a evolução da teoria da probabilidade foi Jakob Bernoulli (1654- 1705), nascido em 27 de dezembro de 1654, na Basiléia, Suíça. Influenciado pelos trabalhos de Huygens, escreveu o primeiro grande tratado de probabilidade intitulado *Ars Conjectura* (A arte da Conjectura). Morreu em 16 de agosto de 1705, no entanto, seu livro estava incompleto, sendo concluído por seu sobrinho Nicolaus Bernoulli (1687- 1759) e publicado somente em 1713. *Ars Conjectandi* foi dividida em 4 partes, cuja 3ª parte contempla a solução detalhada de

24 problemas de jogos de azar. Além disso, o livro continha a demonstração da Lei dos Grandes Números dando o início a uma nova era da teoria da probabilidade, conhecida como o primeiro teorema limite da probabilidade. (GADELHA, 2004, p. 6)

Após essas primeiras contribuições, vários outros matemáticos dedicaram-se para o desenvolvimento da teoria da probabilidade como Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700- 1782), Leonhard Euler (1707- 1783), Joseph Louis Lagrange (1736- 1813), Pierre Simon Laplace (1749- 1827) e tantos outros.

A teoria da probabilidade é caracterizada pelo crescimento cada vez mais constante de suas aplicações práticas, o cálculo de probabilidade é percebido em variadas situações do cotidiano, chances de jogos, passar em concursos públicos, probabilidade de chover, da situação do trânsito, além de estudos em diversas áreas como estatística, economia, física, química, sociologia, psicologia, biologia, na análise de decisão entre outros ramos do conhecimento. A seguir trataremos sobre a metodologia de ensino de matemática por Atividades.

1.4 O Ensino De Matemática Por Atividade Experimentais.

De acordo com Sá (2020), a Teoria da Atividade se desenvolveu no início do século XX, inicialmente com as diferenças entre atividade e ação. Tendo como precursores Vigotski, Hegel, Marx, Luria, Rubinstein, Leontiev, Galperin, Dayvidov, Talizina e Engestron, dentre outros pesquisadores. Esta teoria, segundo Franco (2009, apud SÁ, 2020, pág. 144), “procura estabelecer a diferença entre atividade e ação, entre atividade animal e atividade humana e sua vinculação com a atividade psíquica, sua base material, suas necessidades, seus motivos e finalidades”.

Assim, esta teoria buscou instituir as características gerais que comtemplam uma atividade. Tendo na sua base material, segundo Franco (2009, apud SÁ, 2020, pág. 144),” [...] na diferença da relação do ser humano e os demais animais com a natureza[...]”. Vejamos os elementos estruturantes de uma Atividade, proposto por Leontiev, de acordo com Nunes e Pacheco (1997, apud SÁ, 2020, p. 147):

> O **sujeito** da Atividade é quem realiza a atividade podendo ser um sujeito ou um coletivo de sujeitos que participam da realização da mesma.
> O **objeto** da Atividade é a matéria prima com a qual o(s) sujeito(s) da atividade começa(m) a atuar para obter um determinado produto. Este objeto pode ser material ou ideal.
> Os **motivos** da Atividade correspondem as motivações que levam o(s) sujeito(s) a realizar(em) as ações relacionadas a atividade.

> O **objetivo** da Atividade é a representação imaginária dos resultados possíveis de se alcançar com a realização de uma ação concreta.
> O **sistema de operações** da Atividade consiste dos procedimentos para realizar a ação para transformar o objeto no produto desejado.
> A **base orientadora da ação** se constitui pela imagem que o sujeito tem da ação que vai realizar, bem como também da imagem do produto a obter.
> Os **meios** da Atividade são os instrumentos adequados de que se vale o sujeito para organização e realização da atividade.
> O **produto** da Atividade é o resultado obtido das transformações sobre o objeto da atividade que deve coincidir com o objetivo da atividade. (SÀ, 2020, pág.147).

Nesta vertente, temos os estudos de Davydov que de acordo com Sforni (2004, apud SÁ, 2020, p.148) “[...] relativos à Teoria da Atividade focaram na atividade de estudo. [...]’. O autor compara o pensamento dos educandos durante uma atividade de estudo com o raciocínio dos cientistas, ou seja, “[...] expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações, generalizações, e conceitos teóricos substantivas, que exercem um papel no processo de ascensão do abstrato ao concreto.” (DAVYDOV ,1988, apud SÁ, 2020, p. 148). Ressaltando que estes raciocínios não são idênticos.

Deste modo, de acordo com Sá (2020, p. 148) Davydov ‘[...] aponta para a necessidade de um trabalho pedagógico que favoreça a realização de abstração, generalização e conceituação.” Desta maneira a Atividade de Estudo:

> [...] não é uma reprodução do trabalho dos cientistas, artistas ou filósofos, mas que deve proporcionar momentos de realizações de ações mentais que contribuem para a realização do trabalho de pesquisadores do ramo do conhecimento que está sendo trabalhado pedagogicamente. (SÀ, 2020, p. 148).

Neste seguimento, de acordo com Sá (2020, p.149), quando se trata de atividades direcionadas para o ensino de matemática, estas podem acontecer de várias maneiras, mas que podem ser divididas em duas categorias: uma tendo como único protagonista o professor, neste caso temos como predominância o ensino tradicional, na qual segue um padrão em que é trabalhado os conceitos do objeto de ensino desejado e em seguida de exemplos e exercícios; e a outra tendo como protagonistas o professor e o aluno, sendo ambos importantes e se desenvolvendo de acordo com a participação e função de cada um.

Sá (2020) evidencia que as atuas Tendências em Educação Matemática: Modelagem Matemática, Uso de Jogos, Etnomatemática, Resolução de Problemas, História da Matemática, Investigação Matemática e Uso de novas Tecnologias contém todos os elementos funcionais de uma Atividade, no sentido da Atividade de Estudo. Desta maneira estas tendências podem ser denominadas de Atividade de Modelagem, Atividade de Investigação Matemática, etc. Tendo como protagonistas o aluno e o professor no processo de desenvolvimento das aprendizagens. Unindo-se a estas tendências tem-se a metodologia de **Ensino de Matemática por Atividades Experimentais** que também detém os elementos funcionais de uma Atividade.

Desse modo, com o intuito de direcionar o discente ao aprendizado dos principais conceitos matemáticos envolvidos no conteúdo de probabilidade, desenvolvemos uma sequência de atividades baseado no Ensino de Matemática por Atividade Experimentais, pois segundo Mendes e Sá (2006, p. 13) a principal peculiaridade desta metodologia está no fato de que os conteúdos a serem apreendidos possam ser descobertos pelos próprios alunos durante o processo de ensino, até que sejam assimilados, tendo o professor como orientador.

Segundo Mizukami (1986, apud SÀ, 2019), a atividade foi inserida ao trabalho pedagógico com o intuito de deslocar o protagonismo do professor, uma das características da abordagem tradicional, para que o processo de ensino e de aprendizagem fosse mais evolutivo. Contudo, a adição da atividade no ensino, deu-se, de acordo com Loss (2016, apud SÀ, 2019), “durante o movimento da escola nova que foi uma reação à escola tradicional que fazia uso predominante da exposição oral”, ou seja:

> A tendência ativista chegou ao Brasil na década de 30 do século XX com os pioneiros da Escola Nova, Anísio Teixeira, Fernando de Azevedo, Lourenço Filho e Francisco Campos, entre outros. Nessa tendência há um avanço em relação à tendência tradicional devido a proposição de atividades escolares centradas nos estudantes, como trabalhos em grupos, pesquisas, jogos, exercícios de criatividade, experiências, entre outras. Nessa tendência ocorreu a saída de um extremo autoritário, da tendência tradicional, para outro caracterizado pelo laissez-faire pedagógico. As teorias pedagógicas que orientaram o pedagógico não garantiram à educação a formação do sujeito de forma integral. Na tendência ativista houve uma diversificação das estratégias para a efetivação da aprendizagem O ato educativo restringiu-se a atividades isoladas. (LOSS,2016, p.58-60 apud SÀ,2019, p.14).

De acordo com Loss (2016, apud SÀ, 2019), as ideias da pedagogia nova, tais como a atividade e a inserção na escola de situações da realidade das pessoas, geraram mudanças no processo de ensino e aprendizagem, que enfatizava a memorização dos conteúdos, do ensino por meio da exposição dos conceito seguida de exercícios de fixação, passando para o ensino de matemática da atividade, na qual exige dos estudantes participação ativa por meio dos experimentos, de atividades envolvendo jogos, materiais manipulativos, para que os sujeito pudessem experimentar o processo de descoberta.

Assim, o ensino de Matemática por Atividades Experimentais presume a possibilidade de conduzir o aluno ao aprendizado das noções matemáticas de forma gradual e constante, de maneira dinâmica, participativa e construtiva, desenvolvendo no educando descobertas cognitivas dos conteúdos matemáticos considerando os objetivos de cada atividade. Portanto, trata-se de uma metodologia de ensino que conduz o estudante a redescoberta dos objetivos propostos em cada atividade, elaborados de acordo com a especificidade do conteúdo em questão.

Desta feita, dependo do objetivo de cada atividade, está poderá ser uma Atividade de Conceituação ou uma Atividade de Redescoberta. Cada uma delas com suas estruturas específicas, de modo a atender o objeto de estudo em questão. Para Sá (2019), uma Atividade de **Conceituação** deve conter as seguintes características:

> Uma atividade de conceituação tem como objetivo levar o estudante a perceber a ocorrência de determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático. A definição deste objeto percebido é o objetivo da atividade de conceituação. (SÀ, 2019, p. 17).

Enquanto uma Atividade de Redescoberta:

> Uma atividade de redescoberta tem como objetivo levar o estudante a descobrir uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática. Uma atividade de redescoberta não corresponde a uma demonstração de um resultado matemático, mas sim ao momento de exploração do objeto que antecede a demonstração do resultado. (SÀ, 2019, p. 17).

Contudo, quando trabalhamos o ensino de um objeto matemático por meio de Atividades Experimentais de conceituação ou de redescoberta, devemos considerar os seguintes **momentos** que permeiam a prática com esta metodologia, segundo Sá (2019), são os seguintes: **organização, apresentação, execução, registro**, **análise** e **institucionalização**.

Na **organização** de uma Atividade Experimental, a professora ou o professor deve orientar os participantes a se dividirem em equipes, mas de no máximo quatro e no mínimo dois estudantes, esta formatação irá favorecer o diálogo entre os aprendizes. Deve-se evitar a divisão individual, pois não ajudará na interação entre os discentes. Os docentes devem atuar como mediadores, orientando os alunos quanto a formação das equipes e a se concentrarem na atividade que irão trabalhar (SÁ, 2020).

Na **apresentação** de uma Atividade Experimental, é o momento dos docentes entregarem aos estudantes o material que será utilizado no momento da experimentação, que inclui o roteiro com a orientações, este roteiro dependerá das condições estruturais da escola, podendo ser impresso ou colocado no quadro. Entretanto, se a Atividade Experimental for extensa, é preferível levar a atividade impressa para economizar tempo no decorrer do desenvolvimento, por isso é recomendado que o material esteja organizado em kits. Espera-se dos estudantes atenção às orientações para a realização da Atividade Experimental (SÁ, 2020).

A **execução** numa aula por Atividade Experimental é o momento da experimentação, da ação dos docentes por meio do manuseio de materiais que compõem a atividade, bem como efetuando medidas, cálculos, observações, etc. A expectativa é de que cada uma das equipas realize as tarefas de acordo com as orientações da Atividade Experimental (SÁ, 2020).

A função dos docentes no momento da execução é de inspecionar o trabalho dos discentes, estando sempre atento para as dúvidas que eles possam apresentar, os questionamentos e as dificuldades para execução das ações na hora da realização da Atividade Experimental. Os docentes devem ser cuidadosos e objetivos quando houver algum momento de intervenção, para que os discentes possam continuar executando a Atividade Experimental sem constrangimentos (SÁ, 2020).

Já os discentes, devem se concentrar na realização das ações da Atividade Experimental, conforme as orientações dadas no roteiro da atividade. Cada um no seu grupo, conforme a divisão das equipes e sem conversas paralelas que não estejam relacionadas a ação da atividade. Desta maneira, eles terão a oportunidade de interagir para a busca dos resultados contidos em cada atividade (SÁ, 2020).

Quando surgirem dúvidas referentes ao preenchimento da Atividade Experimental por parte dos discentes, os docentes devem verificar o motivo destas dificuldades, se foi nas orientações do roteiro da atividade ou se foi uma falha ao confeccionar o material, de maneira que estas dúvidas possam ser esclarecidas de maneira socializada com a turma, para que fique claro para todos os participantes do experimento (SÁ, 2020).

O momento do **registro** durante o desenvolvimento de uma Atividade Experimental é quando os discentes participam por meio dos conhecimentos científicos contidos em cada atividade. Este momento é esperado que cada equipe utilize o espaço destinado no roteiro da atividade para o preenchimento das informações referentes ao objetivo da atividade específica (SÁ, 2020).

A função do docente é de supervisionar e está sempre atento caso apareça alguma dúvida no desenvolvimento das ações dos discentes, ou seja, intervindo de maneira a sanar estas dificuldades. Para que a atividade não fique dispendiosa, é importante deixar um espaço adequado para o registro no roteiro da Atividade Experimental (SÁ, 2020).

A **análise** numa Atividade Experimental é o momento em que as equipes participantes devem observar e analisar as suas informações registradas no roteiro da atividade, para que possam perceber que estas informações se relacionam de forma válida. Este momento é de suma importância para que se alcance o objetivo específico abordado na Atividade Experimental, pois os aprendizes terão o primeiro contato com as informações desejadas pelos docentes (SÁ, 2020).

O docente deve estar atento, caso surja alguma dificuldade, por alguma das equipes, em relação a percepção da relação válida presente nas informações registradas pelos discentes deve-se elaborar questões que instiguem os aprendizes a pensarem, refletirem sobre à informação registrada até que os mesmos percebam esta relação válida. A análise de uma Atividade Experimental condiz com a análise de uma pesquisa científica. Neste seguimento, ao final da análise os discentes devem construir a conclusão da equipe, considerando a informação válida trabalhada na atividade (SÁ, 2020).

A **institucionalização** em uma Atividade Experimental é o momento que se equivale as “considerações finais” de um trabalho de cunho científico, neste momento será construído a conclusão final da turma, após a conclusão obtida por cada uma das equipes. É importante ressaltar que as primeiras conclusões apresentadas pelas equipes pode não ter o formato esperado pelos docentes, no sentido da precisão, pois os estudantes ainda não estão familiarizados com o método de ensino por atividades experimentais, em que é solicitado deles o registro, a análise e a construção de observações e conclusões a respeito de um conceito, uma relação ou de uma propriedade matemática, etc. Neste sentido, o docente não deve se preocupar, pois no decorrer do desenvolvimento das atividades os aprendizes vão se aprimorando no registro de suas observações e conclusões (SÁ, 2020).

Vejamos alguns exemplos de observações e conclusões construídas pelos discentes no trabalho de Soares (2018) sobre o ensino de Probabilidade no 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Abaetetuba- Pa. As conclusões e observações construídas são referentes a Atividade Experimental “Variação de probabilidade” que teve como objetivo: descobrir o intervalo de variação da probabilidade de um evento.

Quadro 1: Conclusões e observações elaboradas pelos discentes

Alunos	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	Ánalise
A2 e A3, A10 e A14	Observação: A VARIAÇÃO Conclusão: É QUE A PROOBABILIDADE DE UM EVENTO SEMPRE VARIA INTERVALO DE 0 ATÉ 1	Observação e conclusão válidas sobre a variação da probabilidade
A5 e A11	Observação: Os valores da probabilidade variam de 0 à 1 Conclusão: A probabilidade tende a aumentar em cada caso (de 0 à 1)	Observação e conclusão válidas sobre a variação da probabilidade
A6 e A8	Observação: A probabilidade varia. Conclusão: A probabilidade varia de 0 a 1.	Observação e conclusão válidas sobre a variação da probabilidade

A1 e A7	Observação: Observei que a probabilidade estão variando 0 a 1. Não apresentando número negativo. Conclusão: Conclui que a probabilidade não fica menor que 0 e maior que 1.	Observação e conclusão válidas sobre a variação da probabilidade
A13, A15 e A16	Observação: Conclusão: A probabilidade de um evento sempre varia no intervalo de 0 a 1	Conclusão válida sobre a variação da probabilidade
A17	Observação: OS RESULTADOS ESTÃO VARIANDO Conclusão:	Observação válida sobre a variação da probabilidade.
A4, A12, A18, A19 e A20	Observação: O resultado não vai ser menor que 0 e nem maior que 1 Conclusão: A probabilidade varia de 0 a 1	Observação e conclusão válida sobre a variação da probabilidade.

Fonte: Soares (2018).

Nesta perspectiva, o docente deve orientar as equipes a construírem suas observações e conclusões e em seguida pedir para um membro da equipe que escreva no quadro esta conclusão, após a analisar as conclusões, o professor(a) deve perguntar aos discentes qual das conclusões é a mais adequada para alguém que não participou do experimento possa entender a relação válida na atividade. Além disso, após a socialização o docente pode elaborar junto com as equipes uma conclusão que possibilite a alguém que não participou do experimento entender esta relação, está conclusão construída em conjunto será chamada de **conclusão da turma** (SÁ, 2020).

Se houver possibilidade, é favorável a construção de uma representação por imagens ou símbolos matemáticos que represente a conclusão da turma. Vale destacar aos discentes que não foi feito uma demonstração do resultado concluído, mas pode-se fazer esta demonstração desde seja acessível a compreensão pelos estudantes. Portanto, após o momento da institucionalização finaliza a Atividade Experimental (SÁ, 2020).

Desta forma, podemos observar que a metodologia de ensino que se denomina **Ensino de Matemática por Atividades Experimentais** contém os elementos funcionais de uma Atividade, nos moldes desta Teoria, como estudado no início desta seção. A seguir o quadro abaixo mostra estes elementos estruturais:

Quadro 2: Elementos da Atividade em aula de matemática por Atividade Experimental

Elemento Funcional da Atividade	Elemento da Atividade na Aula Experimental de Matemática
Os sujeitos da atividade	Docentes e estudantes
Objeto da atividade	Conhecimento matemático
O motivo	Necessidade de ensinar/aprender conhecimento matemáticos
O objetivo	Oportunizar o acesso a conhecimento matemático
O sistema de operações	Ações que são permitidas realizar a partir do procedimento e dos matérias disponíveis para a aula
A base orientadora da ação	As informações prévias a respeito dos materiais disponíveis e do conteúdo matemático envolvido

Os meios	Os recursos disponíveis para a realização das ações
As condições	As regras de utilização do material do experimento
O produto	Conclusão/ conceituação obtida

Fonte: Sá (2020)

Consequentemente, segundo Sá (2019), este método de ensino possui seus atributos que se diferenciam das outras metodologias denominadas de Tendências Atuais em Educação Matemática, não havendo incompatibilidade entre elas e nem conflitos. Vejamos os atributos do ensino de Matemática por Atividades Experimentais:

> 1) É diretivo
> 2) Tem compromisso com o conteúdo;
> 3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;
> 4) É estruturado
> 5) É sequencial
> 6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas
> 7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
> 8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade
> 9) Não dispensa a participação do professor
> 10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos.
> 11) É iterativo entre estudantes e professor. (SÁ, 2019, P.16 -17).

As características desta metodologia inferem na perspectiva de orientar o aprendiz a concepção da construção progressiva dos conhecimentos matemáticos contidos em cada atividade, culminando-se na elaboração de um produto capaz de subsidiar e direcionar o trabalho pedagógico docente.

Esta metodologia de ensino também apresenta sugestões importantes que devem fazer parte da construção das atividades:

> As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
> Toda a atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica noções construídas;
> As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do

> grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> De acordo com o modelo proposto por Dockweiller(1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (SÀ, 2009, p.18).

Desse modo, o Ensino de Matemática por Atividades Experimentais é uma metodologia que pode ajudar o profissional da educação matemática e áreas afins no processo de ensino e de aprendizagem, subsidiando-os nas dificuldades encontradas em sala de aula de acordo com as características do objeto matemático que se deseja ensinar. É uma metodologia que tem como foco os discentes, possibilitando o aprendizado significativo das noções matemáticas importantes para sua formação acadêmica e pessoal, contribuindo para o seu desenvolvimento cognitivo.

A seguir, no capítulo 2, veremos um estudo acerca do objeto matemático Probabilidade, seus conceitos e suas propriedades importantes, para subsidiar o desenvolvimento do nosso trabalho.

CAPÍTULO 2. PROBABILIDADE: CONCEITOS BÁSICOS.

Neste capítulo apresentaremos um estudo acerca de algumas definições e propriedades da Teoria da Probabilidade, inicialmente discorremos sobre as diferenças entre experimentos determinísticos e os aleatórios, em seguida os conceitos de espaço amostral e eventos e as operações entre eventos, as diferentes interpretações de probabilidade: clássica, frequentista e subjetiva. A definição axiomática de probabilidade, probabilidade condicional e de eventos independentes.

2.1 Experimentos Determinísticos e Aleatório.

De acordo com Meyer (2009), ao analisar fenômenos da natureza por meio da observação é importante distinguir o próprio fenômeno e o modelo matemático determinístico ou aleatório que melhor o explique, deixando de lado a influência que podemos ter sobre o fenômeno que observamos. Mas, sem abandonar a análise crítica sobre o modelo escolhido. Essa distinção foi muita bem expressa por Neyman (1954, apud MEYER, 2009),

> "Todas as vezes que empregarmos Matemática afim de estudar alguns fenômenos de observação, devemos essencialmente começar por construir um modelo matemático (determinístico ou probabilístico) para esses fenômenos. Inevitavelmente, o modelo deve simplificar as coisas e certos pormenores devem ser desprezados. O bom resultado do modelo depende de que os pormenores desprezados sejam ou não realmente sem importância na elucidação do fenômeno estudado. A resolução do problema matemático pode estar correta e, não obstante, estar em grande discordância com os dados observados, simplesmente porque as hipóteses básicas feitas não sejam confirmadas. Geralmente é bastante difícil afirmar com certeza se um modelo matemático específico é ou não adequado, antes que alguns dados de observação sejam obtidos. A fim de verificar a validade de um modelo, deveremos deduzir um certo número de consequências de nosso modelo e, a seguir, comparar esses resultados previstos com observações." (NEYMAN APUD MEYER (2009, p. 1).

Assim, as ideias acima são fundamentais para o estudo de fenômenos de observação e de modelos apropriados para sua explicação. Vejamos a seguir alguns exemplos de modelo determinísticos:

- ➢ Na gravitação universal, as leis explicam de forma bastante precisa o que acontece na queda de um corpo sob certas condições;
- ➢ As leis de Kepler contribuem para o entendimento do comportamento dos planetas;

- O valor a ser pago por mês ao efetuar a compra de um eletrodoméstico, sabendo-se a taxa de juros efetiva ao mês, o período do financiamento e o pagamento da primeira parcela no ato da compra;
- A distância percorrida por automóvel, conhecendo-se a velocidade e o tempo transcorrido.

Em cada um dos exemplos acima, o modelo específica que dependendo das condições, sob as quais determinado fenômeno aconteça, determinam o valor de algumas variáveis, como exemplo: a grandeza da velocidade, a área varrida sob determinado período de tempo, os juros pago depois de determinado período de tempo, etc. Assim sendo, esses valores aparecem em inúmeras fórmulas conhecidas, relacionando-se de forma definida, mas depende da situação que se esteja observando e o modelo apropriado para essa situação.

Os modelos determinísticos são bastante utilizados em vários fenômenos da natureza. Entretanto, existem fenômenos que pedem um modelo diferente do determinístico para sua averiguação. São os denominados modelos não-determinísticos ou probabilísticos, também chamado de estocásticos. Vejamos alguns exemplos a seguir:

> O lançar um dado e observar o número mostrado na face de cima.
> Jogar uma moeda quatro vezes e observar o número de caras obtido.
> Jogar uma moeda quatro vezes e observar a sequência obtida de caras e coroas.
> Em uma linha de produção, fabricar peças em série e contar o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas.
> Uma asa de avião é fixada por um grande número de rebites. Contar o número de rebites defeituosos.
> Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto a duração de vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.
> A quantidade de metros cúbicos de água consumida em sua residência no primeiro semestre do próximo ano.
> O valor a ser pago na conta de luz da sua residência no próximo mês. (MEYER, 2009, LANDIM et al. 2020).

Os experimentos acima são exemplos de experimentos aleatórios, onde cada um deles poderá ser repetido por inúmeras vezes, sob as mesmas condições, sem que se possa saber qual resultado particular irá ocorrer, mas com a possibilidade de descrever o conjunto dos resultados possíveis do experimento

2.2 Introdução aos Conjuntos.

Com o interesse de tratar sobre os conceitos básicos de modelos probabilísticos, estudaremos algumas noções fundamentais da teoria dos conjuntos. Sendo importante conhecer algumas ideias, conceitos e propriedade deste assunto.

Segundo Meyer (2009), “Um conjunto é uma coleção de objetos. Usualmente, conjuntos são representados por letras maiúsculas do alfabeto $A, B, C,$ etc”. Podemos representar que objetos estão contidos num conjunto, da seguinte forma:

1) Por uma lista dos elementos de A:

Como exemplo, temos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é o conjunto formado pelos naturais que vai de 1 até 5.

2) Por meio de palavras.

Como exemplo, poderemos dizer que A é o conjunto formado por todos os números reais entre 0 e 1.

3) Para descrever o conjunto acima poderemos escrever:

$A = \{x/ 0 < x < 1\}$, isto é, A é o conjunto de todos os x, tal que x é um número real entre 0 e 1.

Cada objeto que compõe o conjunto A é chamado de membro ou elemento de A. quando x for um elemento de A, escrevemos que $x \in A$, e quando x não for um elemento de A, escrevemos $x \notin A$.

O conjunto de todos os objetos que serão estudados será denominado de conjunto fundamental ou conjunto universo. O conjunto universo, geralmente é representado pela letra U. Outro conjunto importante é o conjunto vazio ou nulo, isto é, o conjunto que não contem elemento algum. Esse conjunto geralmente é representado por $\emptyset$.

Dados dois conjuntos A e B, se todo elemento de A também for elemento de B, diremos que A é um subconjunto de B, e representaremos por $A \subset B$. De forma análoga será dada ao caso em que B está contido em A, representado por $B \subset A$.

Dois conjuntos são denominados iguais, $A = B$, se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, dois conjuntos são iguais se eles possuem os mesmos elementos. Assim, para todo conjunto A, temos que:

a) $\emptyset \subset A$

b) $A \subset U$, desde que se tenha definido U

Sejam dados os conjuntos A e B, podemos combiná-los por meio de operações fundamentais da teoria dos conjuntos, denominadas de união e interseção de conjuntos.

A união de A e B, será o conjunto C, tal que:

$$C = \{x/x \in A \; ou \; x \in B \; (ou \; ambos)\}$$

Escrevemos a união de A com B da seguinte forma: $C = A \, U \, B$. Assim, C será formado por todos os objetos que pertençam a A ou pertençam B, ou em ambos.

A interseção de A com B, será o conjunto D, tal que:

$$D = \{x/x \in A \; e \; x \in B\}$$

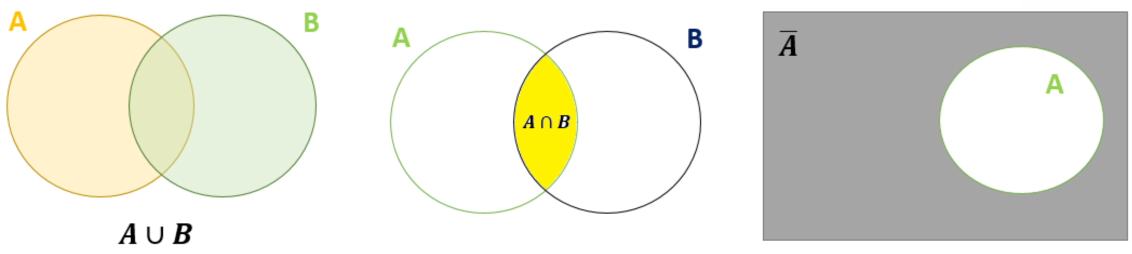
Escrevemos a interseção de A com B da seguinte forma: $D = A \cap B$. Assim D será formado pelos objetos que pertencem a A e a B, simultaneamente.

Temos ainda, uma noção importante sobre a teoria dos conjuntos, denominada de complemento de um conjunto A, representado por $\bar{A}$. Este conjunto é formado por todos os elementos que não estiverem no conjunto A, mas que estejam no conjunto universo. Assim:

$$\bar{A} = \{x/ \, x \notin A\}$$

Uma ferramenta bastante utilizada para representar graficamente a combinação de conjunto é conhecido como o Diagrama de Venn, vejamos abaixo as representações das combinações acima:

Figura 2: Representação da combinação de conjuntos



Fonte: Acervo do Autor.

Vejamos que as operações de união e interseção podem se estender, de maneira intuitiva, para qualquer número finito de conjuntos.

Assim, por definição tem-se $A \cup B \cup C$ como $(A \cup B) \cup C$ ou $A \cup (B \cup C)$, são identidades equivalentes e que podem ser verificadas.

Da mesma forma, por definição, tem-se $A \cap B \cap C$ como $(A \cap B) \cap C$ ou $A \cap (B \cap C)$, são identidades equivalentes e que podem ser verificadas. Vejamos abaixo mais alguns conjuntos equivalentes. Que podem ser verificados por meio do diagrama de Venn.

a) $A \cup B = B \cup A$ $comutaviva\ em\ relação\ a\ união$
b) $A \cap B = B \cap A$ $comutativa\ em\ relçao\ a\ interseção$
c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $associativa\ em\ relação\ a\ união$
d) $A \cap (B \cap C) = A \cap (B \cap C) associativa\ em\ relçao\ a\ interseção$
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
g) $A \cap \emptyset = \emptyset$
h) $A \cup \emptyset = A$
i) $\underline{(A \cap B)} = \underline{A} \cup \underline{B}$
j) $\underline{(A \cup B)} = \underline{A} \cap \underline{B}$
k) $\bar{\bar{A}}$ = A

De acordo com Meyer (2009), a cardinalidade de um conjunto também é importante para o nosso estudo. Se um conjunto é formado por um úmero finito de elementos, por exemplo, $A = \{ a1, a2, a3, \ldots an \}$, dizemos que o conjunto A é finito. Porém, se existir um número infinito de elementos no conjunto A, mas que possam ser colocados em correspondência biunívoca com os inteiros positivos, dizemos que A é numerável ou infinito numerável. Também, temos de considerar o caso de um conjunto infinito e não enumerável, por exemplo, para mostra que quaisquer números reais $b > a$, o conjunto $A = \{ x / a \leq x \leq b \}$ contém um número não enumerável de elementos.

Os conceitos e propriedades vistos acima, representam uma revisão básica da teoria dos conjuntos, mas atendem nossos objetivos, que é trabalhar ideias fundamentais da teoria da probabilidade. Como veremos a seguir:

2.3 Espaço Amostral e Eventos.

De acordo com Landin et al. (2020) **Espaço amostral** "é o conjunto que compreende todos os resultados possíveis de um experimento aleatório". Usaremos a letra maiúscula S para denotar espaço amostral.

Por exemplo, ao jogar um dado em uma superfície plana observa-se o número mostrado na face voltada para cima. Nesse caso todas as possibilidades possíveis para esse experimento são $1, 2, 3, 4, 5, 6$, logo o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Como vimos anteriormente, o experimento que consiste em jogar uma moeda quatro vezes e observar o número de caras obtido. O espaço amostral será o conjunto $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4\}$.

No experimento, jogar uma moeda quatro vezes e observar a sequência obtida de caras e coroas. O espaço amostral será S = {todas as sequencias possíveis da forma $\{a1, a2, a3, a4\}$. Onde cada $ai = C$ ou K dependendo do que apareça cara ou coroa na i-ésima jogada.

Outro conceito importante é o de evento. **Evento** "é qualquer subconjunto A do espaço amostral *S* para o qual faz sentido atribuir uma probabilidade" (Landin et al. (2020). Ao realizar um experimento aleatório, dizemos que um evento A ocorreu, se o resultado tiver sido um elemento de A.

Por exemplo, ao jogar um dado em uma superfície plana, nesse caso o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Consideremos o evento: "sair um número par na face voltada para cima", logo o evento é $A = \{2, 4, 6\}$, dizemos que o evento A ocorreu se tiver ocorrido a face 2, 4 ou 6 na face voltada para cima.

No experimento que consiste em fabricar peças em série e contar o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas. O espaço amostral será $S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, N\}$. Sendo N o número máximo que pode ser produzido em 24 horas. Consideremos o evento: A_1:"todas as peças são perfeitas." Logo $A_1 = \{ 0 \}$.

No experimento que consiste na fixação da asa de um avião por um grande número de rebites e contar o número de rebites defeituosos. O espaço amostral será $S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, M\}$. Sendo M o número rebites empregados. Consideremos A_2: "mais do que três rebites eram defeituosos". Logo, $A_2 = \{4, 5, 6, 7, \dots, M\}$. Vejamos a seguir, algumas operações entre eventos.

2.4 Operações entre Eventos.

É possível relacionar as técnicas de operações entre conjuntos aos eventos e vice-versa. Logo, podemos aplicar as operações já estudadas em conjuntos (união, interseção, diferença, complemento), em eventos e obter novos eventos. Sabendo disso, consideremos as seguintes operações.

- **União**, sendo A e B dois eventos, $A \cup B$ (lê-se A união B) será o evento que ocorrerá se, e somente se A ou B, ou ambos, ocorrerem.

- **Interseção**, sendo A e B dois eventos, $A \cap B$ (lê-se A interseção B) será o evento que ocorrerá se, e somente se A e B ocorrerem simultaneamente.

- **Complementaridade**, sendo A um evento, $\bar{A}$ (lê-se: $\bar{A}$ complementar) será o evento que ocorreu se, e somente se A não tiver ocorrido.

- **Eventos Disjuntos**, dois eventos A e B são denominados disjuntos se a interseção entre eles for vazia ($A \cap B = \emptyset$), ou seja, se eles não tiverem elementos em comum.

- **Evento certo**, dado qualquer espaço amostral S, o conjunto S é considerado um evento especial, chamado de evento certo, ao qual atribui-se probabilidade igual a 1.

- **Evento impossível,** o conjunto vazio ($\emptyset$), também é considerado um evento especial, chamado de evento impossível, ao qual atribui-se probabilidade igual a zero.

Apresentaremos a seguir, três interpretações de Probabilidade, que foram desenvolvidas ao longo dos anos: a Clássica, a Frequentista e a Subjetiva. Em seguida, veremos a definição Axiomática de Probabilidade, onde seu desenvolvimento teve a contribuição do matemático Russo Kolmogorov.

2.5 Interpretação Clássica de Probabilidade.

De acordo com Landim et al. (2020), a interpretação clássica de probabilidade considera todos os eventos elementares equiprováveis, ou seja, igualmente prováveis de ocorrer. Neste sentido, ela é bastante usada em situações que envolvem o lançamento de dados, moedas, sorteios de cartas de um baralho, dentre outras. Além disso, esta interpretação foi utilizada nos primeiros trabalhos teóricos sobre a probabilidade, que foram publicados no século XVII, que envolviam o cálculo de probabilidades em jogos de azar. Não obstante, esta interpretação não será adequada em qualquer situação, pois depende da definição da probabilidade.

2.6 Interpretação Frequentista de Probabilidade.

Na interpretação frequentista, segundo Landim et al. (2020), “a probabilidade de um evento é definida como a frequência relativa de ocorrência deste evento, se o experimento for repetido, sob as mesmas condições, um grande número de vezes”. Um exemplo, é a probabilidade se sair cara no lançamento de uma moeda, que é igual a $\frac{1}{2}$ pois a frequência relativa de caras deveria ser aproximadamente $\frac{1}{2}$ se a moeda fosse lançada um grande número de vezes sob as mesmas condições. Neste sentido, esta definição também apresenta alguns problemas como a falta de clareza quando se trata da situação envolvendo “um grande número de vezes” na realização do experimento, bem como no termo “sob as mesmas condições”.

2.7 Interpretação Subjetiva de Probabilidade.

Na interpretação subjetiva de probabilidade, segundo Landim et al. (2020), “probabilidades de eventos são designadas de acordo com a experiência que o pesquisador tem sobre o fenômeno em investigação”. Desta feita, um dos problemas é a dependência da avaliação que cada indivíduo irá fazer ao atribuir probabilidade a determinado evento, devendo-se ter o cuidado no momento de avaliar e atribuir um valor de probabilidade de acordo com a situação em questão. Sendo que, o mais importante na utilização da interpretação subjetiva de probabilidade é usar da coerência.

2.8 Definição Axiomática.

De acordo com Landim et al. (2020), no início do século XX deu-se o desenvolvimento da teoria moderna da probabilidade, com a contribuição do matemático Russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987), estabeleceu regras básicas que não dependem da interpretação adotada de probabilidade. Possibilitando o desenvolvimento de uma teoria matemática de probabilidade. Vejamos as regras básicas a seguir:

Segundo Landim et al. (2020, p. 171), considerando um espaço amostral S. Uma probabilidade é uma função P que relaciona cada subconjunto de S (evento de S) um número real, de maneira que: está função será sempre não negativa, a probabilidade do evento certo será igual a 1 e, sejam dois eventos disjuntos, a probabilidade da união destes dois eventos será dada pela soma de suas probabilidades individuais.

Simbolicamente, temos:

i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;

ii) $P(S) = 1$

iii) Se A e B são eventos disjuntos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (1)

Com a definição axiomática de Probabilidade, podemos verificar a validade das interpretações de probabilidade vistas anteriormente, de modo que poderemos utilizá-las, dependo da situação que se deseja tratar e calcular probabilidades. Vejamos a seguir:

2.9 Interpretações da Probabilidade e a Definição Axiomática.

Interpretação clássica.

Consideremos o lançamento de um dado honesto, isto é, todas as faces tem a mesma probabilidade de ocorrer.

O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Os eventos elementares são:

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$ e $A_6 = \{6\}$.

Fazendo $P(A_i) = k$, sendo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Temos que $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ e estes eventos são também disjuntos. Usando a definição axiomática, obtemos:

$P(S) = 1 = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 6.k$. Logo, $k = 1/6$.

Podemos observar que as propriedades da definição axiomática são satisfeitas, pois:

a) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \geq 0$, para todo A contido em S;

b) $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$ e,

c) Se A e B são eventos disjuntos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Assim, de acordo com a interpretação clássica, na qual o espaço amostral é um conjunto finito e os eventos elementares são equiprováveis, pode-se calcular a probabilidade de um evento A por meio da expressão:

$P(A)$: Probabilidade do evento A;

$N(A)$: Número de elementos do evento;

$N(S)$: Número de elementos do espaço amostral.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \qquad (2)$$

Interpretação frequentista.

De acordo com Landim et al. (2020), a interpretação frequentista também atende os requisitos das regras básicas, pois atribuem-se probabilidades usando-se a frequência relativa de ocorrência do evento, após observar a ocorrência do evento um grande número de vezes. Neste sentido, temos que uma frequência relativa é sempre um número não negativo. Para o evento certo, teremos a frequência relativa sempre 1, independe da quantidade de repetição do experimento. E, dado dois eventos A e B, disjuntos, a frequência relativa da união dos dois será dada pela soma pela soma da frequência relativa dos dois eventos.

Vejamos o exemplo de Morgado e Teixeira, (2011, p. 7) que considera o experimento de John Kerrich, matemático Sul-africano, que foi prisioneiro de guerra na Dinamarca no período da segunda Guerra Mundial, ele lançou uma moeda 1000 vezes. Vejamos o quadro abaixo:

Quadro 3: Resultados do lançamento de uma moeda 10000 vezes.

Lançamentos	Caras	Acima do Esperado	Proporção
10	4	-1	$0{,}4$
40	21	1	$0{,}525$
100	44	-6	$0{,}44$
200	98	-2	$0{,}49$
400	199	-1	$0{,}4975$

800	413	13	0,5163
2000	1013	13	0,5065
8000	4034	34	0,5043
10000	5067	67	0,5067

Fonte: Acervo do Autor.

Podemos observar que o número de caras acima do “esperado” oscila e aumenta com o número de lançamentos. De acordo com a Lei dos Grandes Números o número de caras se aproxima do número de coroas a medida que o número de lançamento cresce. A diferença entre caras e coroas diminui em termos relativos, ou seja, a proporção de caras se aproxima de $0{,}5$.

Interpretação subjetiva

Na interpretação subjetiva de probabilidade, deve-se usar da coerência na atribuição da probabilidade, para que se tenha a validade das regras básicas. Assim, para espaços amostrais finitos, não devemos atribuir probabilidades fora do intervalo fechado de $[0{,}1]$ e ainda temos de garantir que a soma das probabilidades dos eventos elementares seja igual a 1. De acordo com Morgado e Teixeira, (2011):

> A interpretação subjetiva (ou Bayesiana, ou epistemológica) diz que a probabilidade de um evento é apenas uma medida da fé que temos sobre a sua ocorrência. Assim, a probabilidade de um evento varia de indivíduo para indivíduo, dependendo das informações e crenças que ele tenha. Esta interpretação “maleável" nos permite discutir conceitos como a probabilidade de um evento passado ter ocorrido (ou a probabilidade de uma pessoa ter cometido um crime). Citando o matemático (e magico) Persi Diaconis: “probabilidades não fazem parte das moedas; probabilidades fazem parte das pessoas". (MORGADO E TEIXEIRA, 2011, p. 3).

Assim, analisamos que as três interpretações de probabilidades abordadas neste trabalho satisfazem a definição axiomática de probabilidade, mostrando que suas aplicações dependem do evento que está sendo estudado. A seguir, daremos continuidade estudando algumas propriedades da probabilidade.

2.10 Propriedades da Probabilidade.

Como consequência da definição axiomática, veremos algumas propriedades da probabilidade, de acordo com Meyer (2009). Assim:

P1. Se $\emptyset$ for o conjunto vazio, então $P(\emptyset) = 0$.

Temos das regras básicas que: $P(S) = 1$ e da probabilidade de dois eventos disjuntos: $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap \emptyset = \emptyset$. Logo, $P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) = P(S)$. Portanto: $P(\emptyset) = 0$. (3)

P2. Se $\bar{A}$ for o evento complementar de A, então $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Podemos escrever que $S = A \cup \bar{A}$, e aplicando as propriedades II e III da definição axiomática, obteremos $P(S) = P(A) + P(\bar{A})$, ou seja: $1 = P(A) + P(\bar{A})$ (4)

P3. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Temos que $A \subset B$, usando a propriedade da união para dois eventos disjuntos, podemos escrever: $B = A \cup (B \cap \bar{A})$. Desta forma, usando as propriedades da definição axiomática, obtemos:

$P(B) = P(A \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$, pois $P(\bar{A} \cap B) \geq 0$ pela propriedade I. Portanto: $P(A) \leq P(B)$ (5)

P4. Quaisquer que sejam os eventos A e B de um espaço amostral S. temos que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Da ideia de decompor os eventos $A \cup B$ e B em dois eventos mutuamente excludentes e, aplicando a propriedade III da definição axiomática, podemos escrever:

$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$ e $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$. Então:

(1): $P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$ e (2): $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Subtraindo a segunda desigualdade da primeira, obtemos:

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Portanto: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (6)

A seguir, veremos um dos conceitos mais importantes da Probabilidade, denominado de Probabilidade Condicional.

2.11 Probabilidade Condicional.

De acordo com Landim (2020), quanto mais sabemos sobre determinados fenômenos melhor será nossa análise e construção de modelos matemáticos, tanto para situações aleatórias ou determinísticas. Ter informações a priori ajudará no cálculo da probabilidade de um evento ocorrer e na tomada de decisões. Nesta vertente, surge a Probabilidade Condicional, que trata da probabilidade da ocorrência de eventos aleatórios sabendo do acontecimento de outros eventos de forma antecipada.

Temos como exemplo, uma aplicação da probabilidade condicional na geologia, ao avaliar a existência de petróleo em uma região, considerando informações antecipadas tais como porosidade da rocha, estruturas sísmicas, etc. Quanto mais informação se tem, melhor será a avaliação da probabilidade de encontrar óleo na região.

Consideremos o experimento que consiste no lançamento de um dado uma única vez, se o dado é “honesto”, teremos o espaço amostral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Sejam os eventos $A = \{2,4,6\}$, $B = \{4,5,6\}$ e $C = \{5,6\}$. Suas probabilidades são:

$$P(A) = \frac{3}{6}\ ;\ P(B) = \frac{3}{6}\ ;\ P(C) = \frac{2}{6}$$

Vamos supor que temos a informação antecipada de que o número obtido no lançamento foi par. Dessa forma, o novo conjunto universo a ser considerado será $A = \{2,4,6\}$. Assim, sabendo-se que o número obtido é par, qual a probabilidade de ele ser maior que 3? Ou seja, qual a probabilidade do evento B ocorrer, tendo a informação antecipada de que A ocorreu? Esta é a chamada probabilidade condicional de B dado A, que podemos representar por:

$$P(B\ /\ A) = \frac{2}{3}$$

Observamos que há apenas dois casos “favoráveis” para B ocorrer em três casos “possíveis” em A.

Assim sendo, por definição, sejam A e B dois eventos associados a um experimento, a probabilidade condicional do evento A ocorrer quando o evento B tiver ocorrido e $P(B) > 0$, pode ser calculada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (7)$$

Podemos verificar que a definição de probabilidade condicional satisfaz a definição axiomática da probabilidade, já citadas anteriormente, como segue:

A primeira é a de que toda probabilidade é um número não negativo. De fato, tem-se que dado um evento $A \subset S$ qualquer,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

$$temos\ que\ P(A \cap B) \geq 0\ e\ P(B) > 0. Portanto, P(A/B) \geq 0.$$

A segunda, para que se tenha P(S) = 1 podemos considerar que dado que o evento *B* ocorreu, o natural é passar a considerá-lo como o “novo” espaço amostral. Assim,

$$P(B/B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

dessa forma vale a segunda regra básica.

A terceira, sendo A_1 e A_2 eventos disjuntos

$$P[(A_1 \cup A_2)|B] = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)}$$
$$= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)}$$

Como os eventos $A_1 e\ A_2$ são disjuntos, consequentemente, os eventos $A_1 \cap B \subset A_1$ e $A_2 \cap B \subset A_2$ também são disjuntos tal que $P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)] = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$, ou seja a terceira regra básica, logo:

$$P[(A_1 \cup A_2)|A] = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$
$$= P(A_1/B) + P(A_2/B).$$

Ademais, as outras propriedades da probabilidade vistas anteriormente, também são válidas para a probabilidade condicional, ou seja:

a) $P(\emptyset|B) = 0$

b) $Se\ A_1 \subset A_2$, então $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$.

c) $P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$.

d) $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$.

2.12 Regra da Multiplicação e Diagrama de Árvore.

Com a regra da multiplicação é possível calcular a probabilidade de dois eventos ocorrerem de forma simultânea, ou seja $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. Assim, por meio da definição de probabilidade condicional, temos que:

$$P(A \cap B) = P(B).(PA/B)$$

É aplicada para calcular a probabilidade da ocorrência conjunta de dois ou mais eventos, em experimentos sequenciais, como veremos no exemplo a seguir adaptado de Landim (2020):

Em um grupo de 12 pessoas, sabe-se que 8 delas votarão no candidato à prefeito *ABC* e as outras 4 votarão no candidato a prefeito *XY Z*. Suponha que duas pessoas serão escolhidas sequencialmente, ao acaso e sem reposição desse grupo. Deseja-se calcular a probabilidade de que as duas pessoas sorteadas votarão em candidatos a prefeito distintos.

Consideraremos os seguintes eventos:

A_1: “a primeira pessoa sorteada votará em *ABC* ”

$\bar{A}_1$: “a primeira pessoa sorteada votará em *XY Z* “.

A_2: “a segunda pessoa sorteada votará em *ABC* ”

$\bar{A}_2$: “a segunda pessoa sorteada votará em *XY Z* “.

O evento cuja probabilidade queremos calcular é:

E: “as duas pessoas sorteadas votarão em candidatos distintos.”

Temos que: $E = (A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)$ como os eventos $A_1 \cap \bar{A}_2$ e $\bar{A}_1 \cap A_2$ são disjuntos, então $P(E) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2)$. Usando a regra da multiplicação, obtemos:

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1).P(A_1) = \frac{8}{12}.\frac{4}{11} = \frac{8}{33}$$

sendo que $P(A_1)$ é a probabilidade da segunda pessoa não votar em ABC, dado que a primeira vota em ABC.

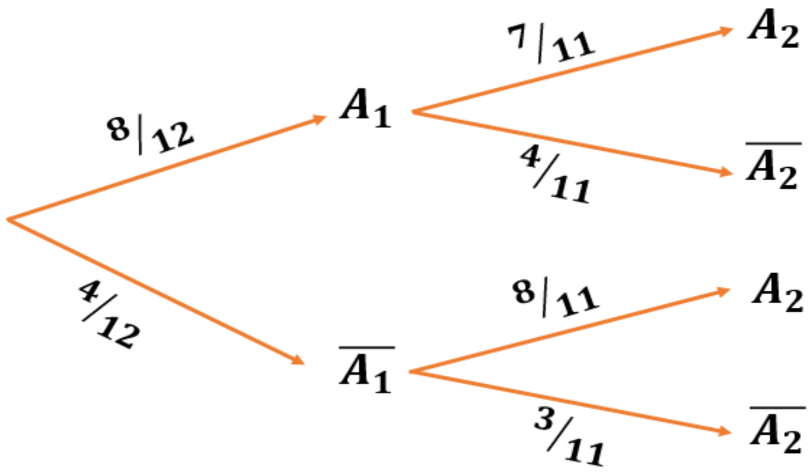
$$P(\bar{A}_1 \cap A_2) = P(\bar{A}_1).P(\bar{A}_1) = \frac{4}{12}.\frac{8}{11} = \frac{8}{33}$$

sendo que, $P(\bar{A}_1)$ é a probabilidade da segunda pessoa votar em ABC, dado que a primeira não vota em ABC.

Logo: $P(E) = \frac{8}{33} + \frac{8}{33} = \frac{16}{33} \approx 0{,}485$

Este exemplo também poderia ser resolvido pelo **Diagrama de Árvore,** na qual cada ponto de subdivisão da árvore desdobra-se nas possibilidades. No exemplo acima temos apenas duas para o primeiro ponto, e a partir de cada possibilidade, partirão mais duas possibilidades. Em cada ramificação colocamos as respectivas probabilidades, conforme a figura abaixo:

Figura 3: Resolução pelo diagrama de árvore



Fonte: Acervo do Autor.

Destacando as quatro configuração possíveis do diagrama da figura 3, obtemos: $(A_1 \cap A_2)$, $(A_1 \cap \bar{A}_2)$, $(\bar{A}_1 \cap A_2)\ e\ (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_1)$. A configuração desejada é: $(A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)$.

Logo, pelo diagrama de árvore, obtemos: $P(E) = \frac{8}{33} + \frac{8}{33} = \frac{16}{33} \approx 0{,}485$

2.13 Eventos Independentes.

De acordo com Landim (2020), “Dois eventos A e B são ditos independentes se a ocorrência de um deles não muda a incerteza sobre a ocorrência do outro”.

Como exemplo, consideremos uma caixa com 10 peças, das quais 4 são defeituosas. São retiradas duas peças, uma após a outra, com reposição. Vamos considerar os seguintes eventos:

A : “ a primeira peça é boa”

B : “a segunda peça é boa”

Assim, podemos observar que os eventos A e B são independentes, pois $, P(A) = P(B) = \frac{6}{10}$, ou seja, a probabilidade do evento B não mudou, mesmo que a primeira peça retirada tenha sido boa.

Simbolicamente, se A e B são ditos eventos independentes se $P(A|B) = P(A)$, ou equivalentemente, se $P(B|A) = P(B)$. (8)

Como consequência da probabilidade condicional, temos que se A e B são dois eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \tag{9}$$

Do conceito de eventos independentes, observamos a simetria tal que se $P(A|B) = P(A)$ então $P(B|A) = P(B)$. Vejamos:

$$Se\ P(B) = P(A)\ temos\ que\ P(A \cap B) = P(A).P(B), logo:$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Contudo, devemos ter cuidado quando lidamos com eventos independentes, pois se não temos a certeza da independência dos eventos, usamos a regra da multiplicação, estudada na probabilidade condicional, ou seja, $P(A \cap B) = P(B).(PA/B)$.

2.14 Eventos Independentes Versus Eventos Disjuntos

Consideremos o experimento que consiste em lançar um dado honesto e, em seguida, lançar uma moeda honesta e os eventos

A : "ocorre uma face par" e *B* : "ocorre uma cara".

a) A e B são eventos disjuntos?

b) A e B são eventos independentes?

O espaço amostral consiste de uma combinação de dois casos, isto é:

$$S = \{(1,C),(1,K),(2,C),(2,K),(3,C),(3,K),(4,C),(4,K\ ),(5,C),(5,K),(6,C),(6,K)\}$$

Onde: C é cara e K coroa para o lançamento de uma moeda.

Os eventos A e B são:

$A\ =\ \{(2,C),(2,K),(4,C),(4,K),(6,C),(6,K)\}$, com $P(A) = \frac{6}{12} = 0{,}5$

$B\ =\ \{(1,C),(2,C),(3,C),(4,C),(5,C),(6,C)\}$, com $P(B) = \frac{6}{12} = 0{,}5$

$A\ \cap\ B\ =\ \{(2,C),(4,C),(6,C)\}$, com $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = 0{,}25$

Temos que os eventos A e B não são disjuntos, pois $A\ \cap\ B \neq ø$. De acordo com Landim (2020), é natural pensarmos que os lançamentos do dado e da moeda sejam independentes, pois a ocorrência de um não interfere na ocorrência do outro. Contudo, este raciocínio pode ser confirmado pela probabilidade conjunta dos eventos A e B, ou seja, $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}5.0{,}5 = 0{,}25$, é importante destacar que não será possível que dois eventos positivos sejam ao mesmo tempo disjuntos e independentes.

2.15 Eventos Disjuntos Versus Eventos Independentes.

Segundo Landim (2020), sejam A e B dois eventos em um espaço amostral S tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

a) Se A e B são eventos disjuntos, então A e B não são eventos independentes.

Se A e B são disjuntos, então $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) > 0$, pois $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Assim, A e B não são independentes.

b) Se A e B são eventos independentes, então A e B não são eventos disjuntos.

Se A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) > 0$ o que implica que $A \cap B \neq \emptyset$. Logo, A e B não são disjuntos.

2.16 Teorema de Bayes.

De acordo com Fonseca e Martins (2013), se os eventos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \ldots A_n$, são eventos disjuntos e $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_{5\ldots} \cup A_n = S$, com $P(A_i)$ as probabilidades conhecidas dos eventos, e seja B um evento qualquer do espaço amostral, sendo conhecidas todas as probabilidades condicionais $P(A)$. Logo, para cada "i" tem-se:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(A_1).P(A_1) + P(A_2).P(A_2) + \cdots + P(A_n).P(A_n)}$$

Este teorema relaciona a probabilidade a priori $P(A_i)$ com probabilidade a posteriori $P(A_i|B)$.

Vejamos o exemplo a seguir, adaptado de Fonseca e Martins (2013) sobre as configurações das bolas nas cores preta, branca e vermelha, colocadas em três urnas:

Quadro 4: Configuração das cores das bolas nas urnas 1, 2, e 3.

Urnas / Cores	u_1	u_2	u_3
Pretas	3	4	2
Brancas	1	3	3
Vermelhas	5	2	3

Fonte: Fonseca e Martins (2013)

Ao escolher uma urna ao acaso e dela retirar uma bola ao acaso, verificou-se que a bola é branca. Qual a probabilidade da bola ter vindo da urna 2?

Assim, temos as seguintes probabilidades para as urnas:

$P(u_1) = \frac{1}{3};\ P(u_2) = \frac{1}{3};\ P(u_3) = \frac{1}{3}$

A probabilidade condicional de a bola ser branca (b_r) para cada urna é:

$P(b_r|u_1) = \frac{1}{9};\ P(u_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};\ P(b_r|u_3) = \frac{3}{8}$

A probabilidade desejada é $P(u_2|b_r)$. Logo, pelo teorema de Bayes, obtemos:

$$P(u_2|b_r) = \frac{P(u_2).P(b_r|u_2)}{P(u_1).P(u_1) + P(u_2).P(u_2) + P(u_3).P(u_3)}$$

$$P(b_r) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}} = \frac{24}{59}$$

Assim, a probabilidade a priori de u_2 era $\frac{1}{3}$, com a informação antecipada que saiu a bola branca, a probabilidade a posteriori de u_2 será de $\frac{24}{59}$.

É importante salientar, que existe uma situação para que dois eventos sejam disjuntos e independentes ao mesmo tempo, porém um dos eventos A ou B deve ter probabilidade nula.

Após os estudos dos conceitos básicos da Teoria da Probabilidade, no capítulo a seguir, vamos tratar da construção/adaptação de uma sequência didática baseada no Ensino de Matemática por Atividades Experimentais. Está sequencia poderá ser aplicada no 8º ano do Ensino Fundamental. Utilizamos como referência o trabalho se Soares(2018).

CAPÍTULO 3. ATIVIDADES PARA ABORDAGEM DE CONTEÚDOS EM PROBABILIDADE .

Com base na Fundamentação Teórica, elaboramos uma sequência didática composta por 5 atividades para trabalhar alguns conteúdos de Probabilidade no Ensino Fundamental seguidas de atividades de fixação, inicialmente, constituídas de tabelas com questões para que o aluno possa gradualmente construir os conceitos probabilísticos que são os objetivos de aprendizagem de cada atividade.

Além disso, elaboramos um pré-teste, com a intenção de apurar o nível de conhecimento que os discentes que irão participar do experimento se encontram e o pós-teste, com as mesmas questões do pré-teste, para comparar os resultados dos mesmos estatisticamente com os resultados do pré-teste, utilizando tabelas, gráficos, quadros, etc.

Abaixo apresentaremos as questões do pré-teste e do pós-teste, em seguida uma apresentação dos conteúdos abordados na sequência didática.

3.1 Pré-teste e pós-teste.

01) No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento “sair um número primo”.

02) Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente.

03) Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número:

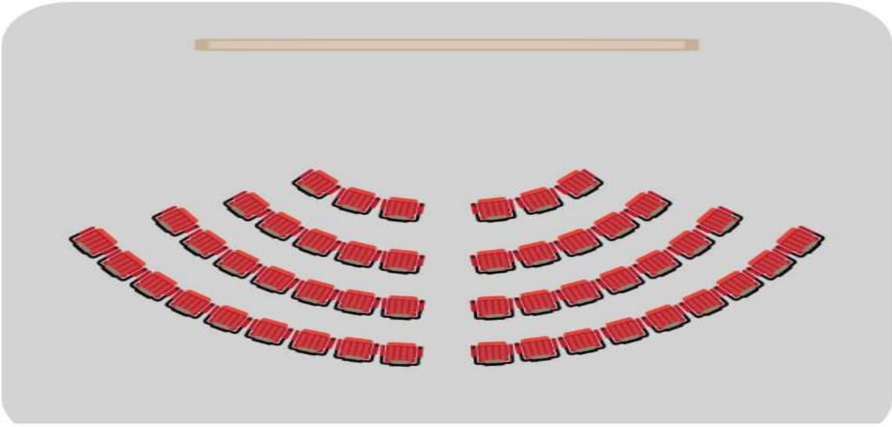
a) menor do que 21?

b) maior do 20?

04) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Umas das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

05) Jogamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de que o total de pontos seja igual a 7?

06) (Livro SAE digital. Adaptado) Na imagem abaixo estão representados os assentos de uma sala de cinema.



A) Qual é a probabilidade de um assento da primeira fileira ser escolhido aleatoriamente?

B) Qual é a probabilidade de um assento da quarta fileira ser escolhido aleatoriamente?

07) Considere os números de 1 a 100. Sorteando um número ao acaso, qual é a probabilidade de o número:

a) Ser múltiplo de 6?

b) Ser múltiplo de 3 e de 5?

08) Uma urna contém 2 bolas amarelas, 4 bolas azuis e 3 bolas vermelhas. Ao retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser azul? E vermelha?

3.2 Apresentação das Atividades Da Sequência Didática.

Nesta seção, planejamos uma sequência didática baseada no ensino por atividades experimentais a partir do trabalho de Soares (2018), com o intuito de conduzir os estudantes para um aprendizado mais efetivo dos conceitos probabilísticos, por meio da percepção dos conceitos matemáticos presentes em cada atividade proposta. Posto que o ensino por atividade experimentais viabiliza um roteiro dinâmico de interação, participação e descobertas de conhecimentos de forma cognitiva.

Esta sequência didática está constituída por 5 atividades e questões de fixação propostas para cada uma das atividades explorando o conteúdo de probabilidade para o 8º ano do Ensino Fundamental.

As atividades propostas para compor a sequência abordam os seguintes conteúdos:

- Experimentos Aleatórios e Determinísticos;
- Espaço Amostral;
- Eventos;
- Conceito Clássico de Probabilidade;
- Intervalo de Variação de Probabilidade.

Cada atividade é composta pelo título, o objetivo, os materiais necessários e os procedimentos a serem realizados, solicitação de observações para que os alunos possam expor suas ideias acerca da atividade e o espaço para conclusão da atividade, para sistematizar os conhecimentos matemáticos adquiridos na atividade. A seguir apresentaremos as atividade da sequência didática

3.3 ATIVIDADE 1. Adaptada da dissertação de Soares (2018).

Título: **Experimentos aleatórios e determinísticos**

Objetivo: Descobrir a diferença entre experimentos determinísticos e não-determinísticos.

Material: Urnas com bolas, dados, moedas, caneta ou lápis e roteiro da atividade impressa.

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

EVENTO(SITUAÇÃO)	**ANTES DE OCORRER É POSSÍVEL SABER O RESULTADO?**	
	SIM	**NÃO**
1. Da cor de uma bola retirada de uma urna que só contém bolas pretas?		
2. Ao lançarmos um dado uma única vez, qual a face que ficará voltada para cima(1,2,3,4,5,6)?		
3. Que a luz se acenderá ao apertar o interruptor? (Em condições normais de energia).		
4. Que ao lançarmos uma moeda uma única vez, qual a face ficará voltada para cima (cara ou coroa)?		
5. Dê ao Lançarmos uma pedra ao rio, se ela vai ao fundo?		
6. O tempo, contado a partir de hoje, que a lâmpada do seu quarto levará para queimar?		
7. O número de likes que você irá receber no período de 24h após a sua postagem em uma rede social?		
8. Da temperatura em que a água ferve (Ponto de ebulição)?		

9. Do efeito de um tratamento anticancerígeno em um paciente?		
10. Do gênero (masculino ou feminino) no nascimento de uma criança?		

Um experimento em que é possível saber o resultado antes de ele ocorrer é denominado de **experimento**

Um experimento em que não é possível saber o resultado antes de ele ocorrer é denominado de **experimento aleatório**.

Questões Propostas

Analise os experimentos seguintes e classifique-os em determinísticos ou aleatórios:

1. Escolher um número inteiro entre 0 e 1000.

2. Determinar a solução real da equação $x - 8 = 0$.

3. Sortear um número em uma rifa e verificar o número.

4. A distância percorrida por um objeto em movimento, conhecendo-se a velocidade e o tempo transcorrido.

5. O número de quilowatts consumidos na sua residência no próximo mês.

6. Escolher um aluno de uma turma e anotar a nota que ele tirou na prova de ciências.

7. O valor a ser pago na conta de luz da sua residência no próximo mês.

9. A quantidade de metros cúbicos de gás consumida na sua residência no primeiro semestre do próximo ano;

10. O valor constante de cada prestação quando se financia um eletrodoméstico, estabelecendo-se a taxa de juros efetiva ao mês, a quantidade de meses do financiamento e o pagamento da primeira prestação no ato da compra.

11. A sua média final em Matemática desse ano.

12. A quantidade de metros cúbicos de água consumida em sua residência no primeiro semestre do próximo ano

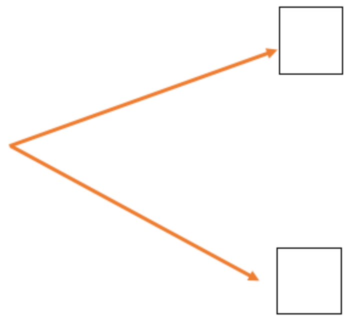
3.4 . ATIVIDADE 2. Adaptada da dissertação de Soares (2018).

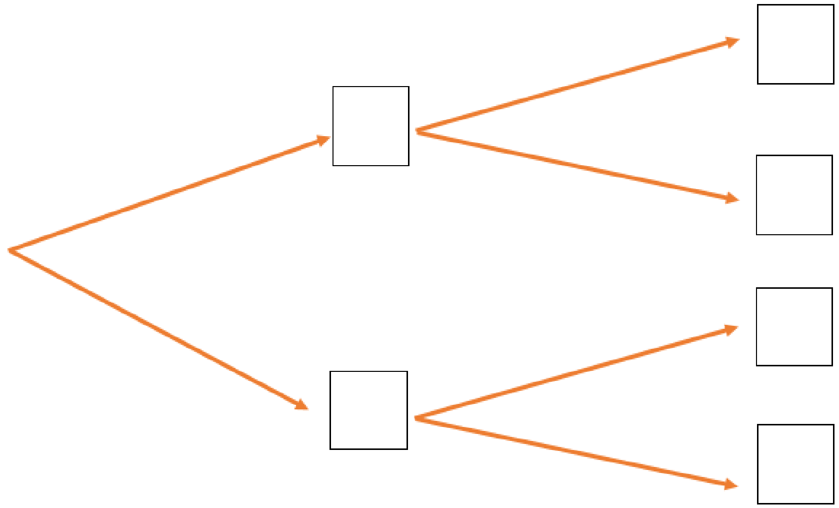
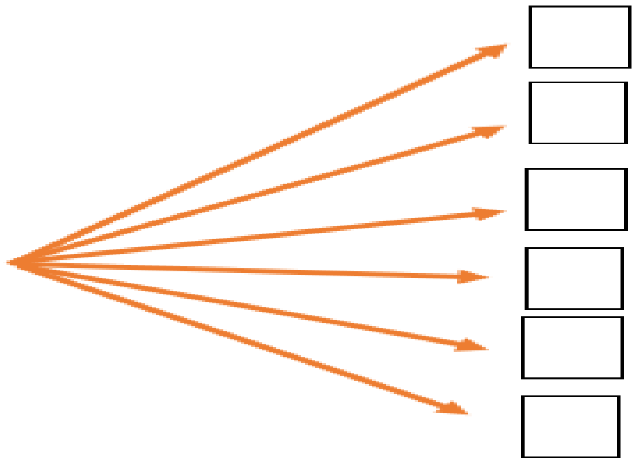
Título: **Espaço Amostral**

Objetivo: Identificar o conjunto dos resultados possíveis num experimento aleatório.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis, urnas com bolas coloridas, PowerPoint.

Procedimento: Considere os seguintes experimentos e preencha o quadro a seguir:

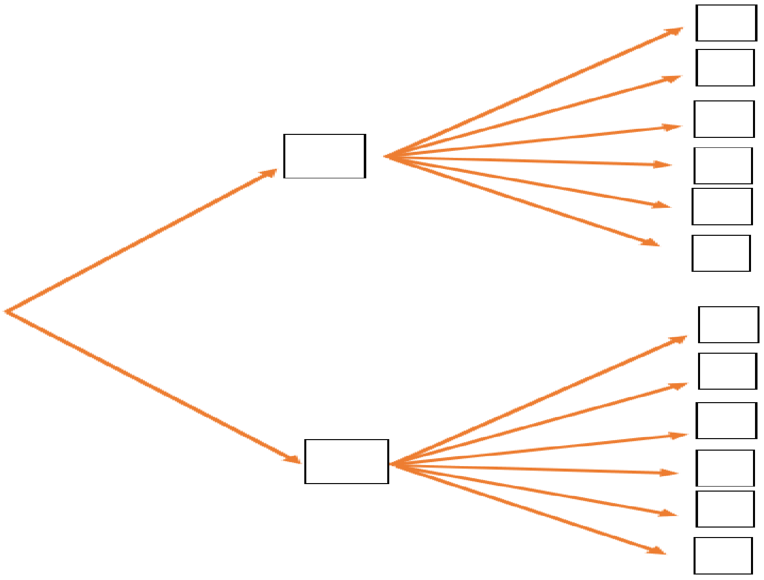
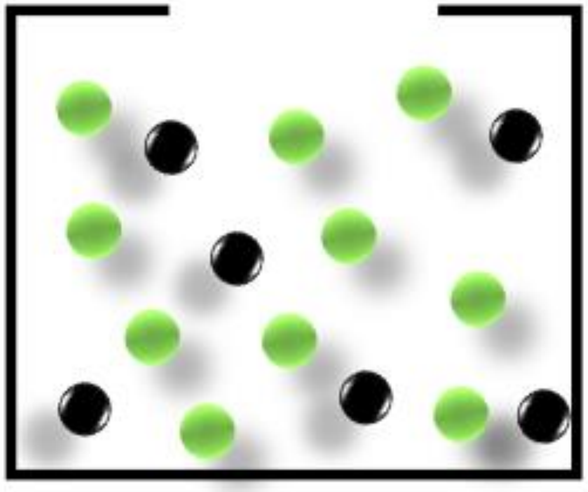
EXPERIMENTOS	RESULTADOS POSSÍVEIS DO EXPERIMENTO	NÚMERO DE RESULTADOS POSSÍVEIS DO EXPERIMENTO
1) Lançar uma moeda uma única vez e observar a face voltada para cima;		

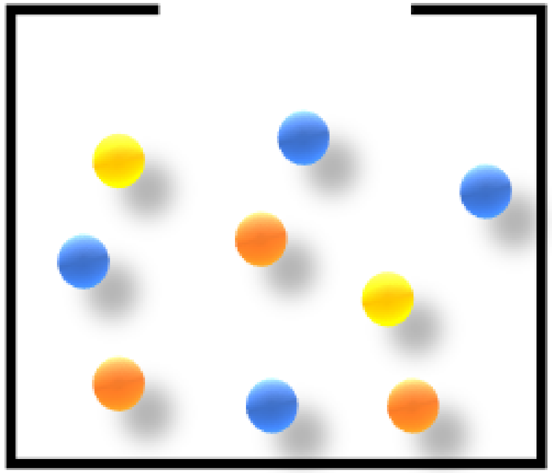
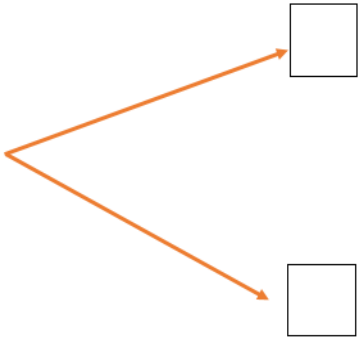
2) Lançar uma moeda duas vezes e observar a face voltada para cima; Usando **C** para **cara** e **K** para coroa, pode-se identificar todas as possibilidades, construindo-se o seguinte diagrama, chamado diagrama de árvore.		
3) Lançar um dado uma única vez e observar a face que ficará voltada para cima;		

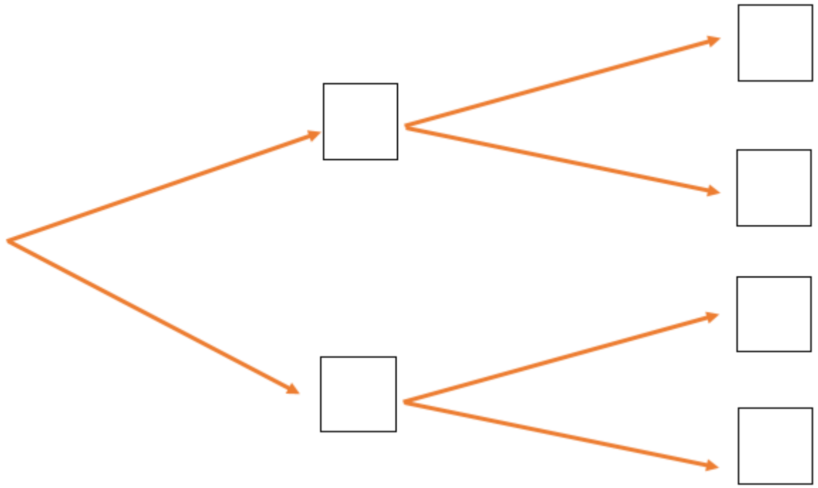
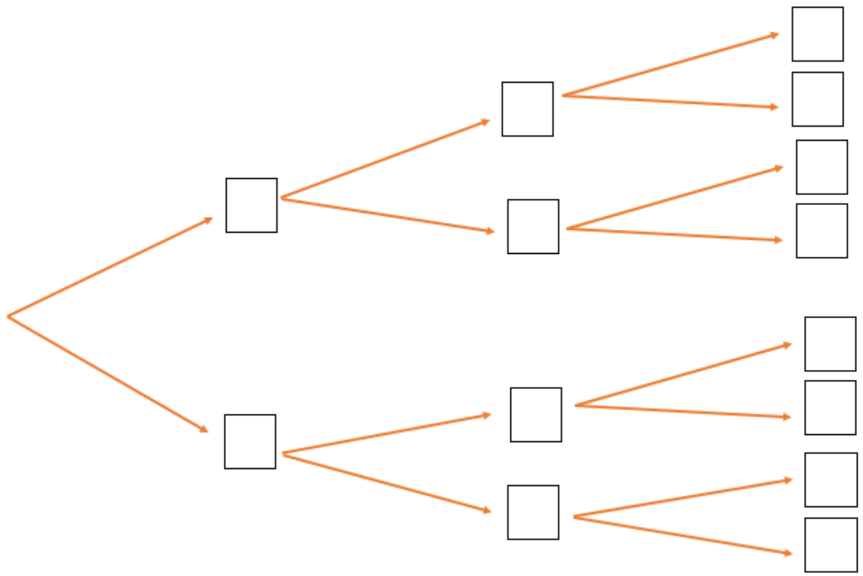
4) Lançar um dado duas vezes;

Usando **D_1** para um dado e **D_2** para o outro, pode-se identificar todas as possibilidades, construindo-se a seguinte tabela de dupla entrada.

D1 / D2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

5) lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado);		
6) Retirar uma bola de uma urna com 10 bolas verdes e 6 bolas pretas, todas de mesmo tamanho e feitas de mesmo material;		

7) Uma urna contém 2 bolas amarelas, 4 bolas azuis e 3 laranjadas;		
8) Um casal planeja ter 1 filho. Observa-se a sequência de gêneros para 1 filho.		

9) Um casal planeja ter 2 filhos. Observa-se a sequência de gêneros dos 2 filhos. Usando **a** para menina e **o** para menino, pode-se identificar todas as possibilidades, construindo-se o seguinte diagrama, chamado diagrama de árvore.		
10) Um casal planeja ter 3 filhos. Observa-se a sequência de gêneros dos 3 filhos.		

11) Três pessoas A, B e C são colocadas numa fila e observa-se a disposição das mesmas.		

Ao conjunto dos resultados possíveis de um experimento aleatório chamamos de **Espaço Amostral.** Podemos representar o conjunto dos elementos de um espaço amostral por **S.** O número de elementos de um espaço amostral S pode ser representado por $N\ (S)$**.**

Questões Propostas.

Descreva o espaço amostral e o número de elementos deste espaço dos seguintes experimentos:

1. Lançar uma moeda três vezes e observar as sequências de caras e coroas.

2. De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), extrair uma bola e observar sua cor.

3. Retirar uma bolinha numerada de uma urna com 25 bolinhas, numeradas de 1 a 25, e observar seu número.

4. Sortear uma carta ao acaso, de um baralho que possui 52 cartas, distribuídas em 4 naipes: ouro, copas, paus e espadas.

5. Em um bingo, cada cartela contém números de 1 a 75. A cada rodada, um número for sorteado ao acaso.

3.5 ATIVIDADE 3. Adaptada da dissertação de Soares (2018).

Título: **Eventos**

Objetivo: Identificar e representar subconjuntos.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis, urnas com bolas coloridas

Procedimento: Considere os seguintes experimentos e preencha o quadro a seguir:

EXPERIMENTOS	**ESPAÇO AMOSTRAL**	**SUBCONJUNTOS DO EXPERIMENTO**	**POSSIBILIDADES PARA CADA SUBCONJUNTO**	**NÚMERO DE ELEMENTOS DE CADA SUBCONJUNTO**
1) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima	S =	A = “Sair cara”	A =	N (A) =
		B = “Sair coroa”	B =	N (B) =
		C = “Sair cara ou coroa”	C =	N (C) =

2) Lançar um dado uma única vez e observar a face que ficará voltada para cima.	S =	A = "Obter número par"	A =	N (A) =
		B = "Obter número ímpar"	B =	N (B) =
		C = "Obter número maior que 6"	C =	N (C) =
3) Lançar uma moeda duas vezes e observar a face voltada para cima.	S =	A = "Sair duas Caras"	A =	N (A) =
		B = "Sair pelo menos uma cara"	B =	N (B) =
		C = "Sair exatamente duas Coroas."	C =	N (C) =

4) Retirar uma bola de uma urna com 10 bolas verdes e 6 bolas pretas, todas de mesmo tamanho e feitas de mesmo material.	S =	A = “Sair Bola Verde”	A =	N (A) =
		B = “Sair Bola Preta”	B =	N (B) =
		C = “Retirar bola verde e Preta.”	C =	N (C) =
5) lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado).	S =	A = “Sair cara na moeda.”	A =	N (A) =
		B = “Sair par no dado”	B =	N (B) =
		C = “Sair número primo ou coroa”	C =	N (C) =
6) Lançar um dado duas vezes	S =	A = “Obter soma 5”	A =	N (A) =
		B = “Obter resultados iguais”	B =	N (B) =
		C = “Obter soma 13”	C =	N (C) =

A qualquer subconjunto de um espaço amostral de um experimento aleatório denominamos de **Evento**

Questões Propostas

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima. Descreva os eventos:

a) Ocorrência de um número ímpar.

b) Ocorrência de um número menor que 7.

c) Ocorrência de um número maior ou igual a 7.

2. Uma urna contém 20 bolinhas, numeradas de 1 a 20. Uma bolinha é escolhida ao acaso e observa-se seu número.

Seja S = {1,2,3,4...,19, 20}.

Descreva os eventos:

a) O número obtido é par

b) O número obtido é primo

e) O número é múltiplo de 2 e de 5

3. A sequência dos gêneros possíveis para o nascimento de 3 filhos de um casal. Descreva os eventos:

a) O casal ter 2 meninos e 1 menina;

b) O casal ter 3 meninos;

c) O casal ter 2 meninas e 1 menino.

4. Uma família gosta de jogar bingo em casa, sorteando ao acaso números de 1 a 90. Considerando que o número sorteado na primeira rodada seja um múltiplo de 5, escreva o espaço amostral e o evento representativo da situação.

05) Um experimento consiste em retirar uma bolinha numerada de uma urna com 25 bolinhas, numeradas de 1 a 25, e observar seu número.

a) Escreva os elementos do evento A, sendo A "o número obtido ser múltiplo de 9"

b) Escreva os elementos do evento B, sendo B "o número obtido ser maior que 23".

3.6 ATIVIDADE 4. Adaptada da dissertação de Soares (2018).

Título: **Probabilidade clássica**

Objetivo: Conceituar probabilidade de um evento.

Material: Caneta ou lápis e roteiro da atividade impressa

Procedimento: Responda as questões:

01) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez, e observarmos a face que ficará voltada para cima:

a) Quantas possibilidades de resultado par existem?
b) Qual é o total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair par e o total de possibilidades?

02) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez:

a) Quantas possibilidades de resultado ímpar existem?
b) Qual é o total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair ímpar e o número total de possibilidades?

03) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima:

a) Quantas possibilidades de resultado sair o número 3 existem?
b) Qual é o número total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair o número 3 e o número total de possibilidades?

04) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima:

a) Quantas possibilidades de sair um número maior que 4 existem?
b) Qual é o número total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair um número maior que 4 e o número total de possibilidades?

05) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima:

a) Quantas possibilidades de sair um número menor que 3 existem?
b) Qual é o número total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair um número menor que 3 e o número total de possibilidades?

06) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso:

a) Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor branca existem?
b) Qual é o número total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor branca e o número total de possibilidades?

07) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso:

a) Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor amarela existem?
b) Qual é o número total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor amarela e o número total de possibilidades?

08) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso:

a) Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor preta existem?
b) Qual é o número total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor preta e o número total de possibilidades?

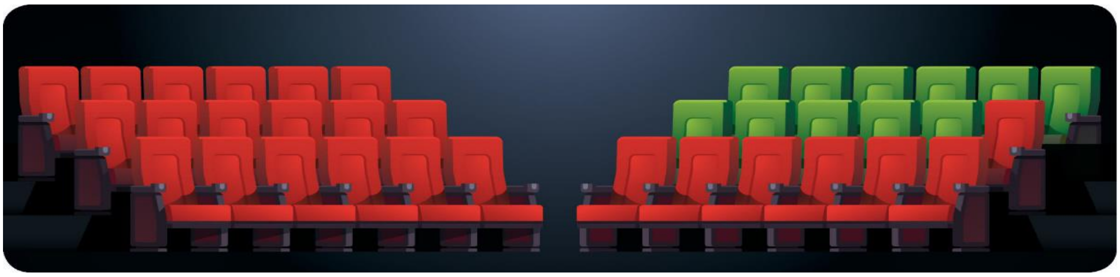
09) Ao lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado).

a) Quantas possibilidades de sair cara na moeda existem?
b) Qual é o número total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair cara na moeda e o número total de possibilidades?

10) Ao Lançarmos um dado normal duas vezes e observamos a face que ficará voltada para cima.

a) Quantas possibilidade de obter soma 5 nas faces voltadas para cima?
b) Qual é o número total de possibilidades de resultados?
c) Qual é a razão entre o número de possibilidades de obter soma 5 e o número total de possibilidades?

11) (Livro SAE digital. Adaptado) Na escola Canto do Saber, a turma do 7.º ano fará uma apresentação de teatro. Para realizar uma cena especial, alguns alunos estarão na plateia, sentados em lugares estratégicos (reservados em verde, conforme a imagem).



a) Qual o número de possibilidade de se sentar nos lugares reservados em verde?

b) Qual o número total de possibilidades?

c) Qual é a razão entre o número de possibilidades de se sentar nos lugares reservados em verde e o total de possibilidades?

A razão entre o número de possibilidades desejadas em um evento e o número total de possibilidades do evento é denominada de **probabilidade** do evento desejado, ou seja:

Número de possibilidades desejadas (favoráveis) do evento

Número total de possibilidades do evento

De acordo com Giovanni Junior e Castrucci (2018, p. 353) a probabilidade (P) de um evento (E) acontecer, a partir de um experimento aleatório, é dada pela razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral. E pode ser representada por:

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}}$$

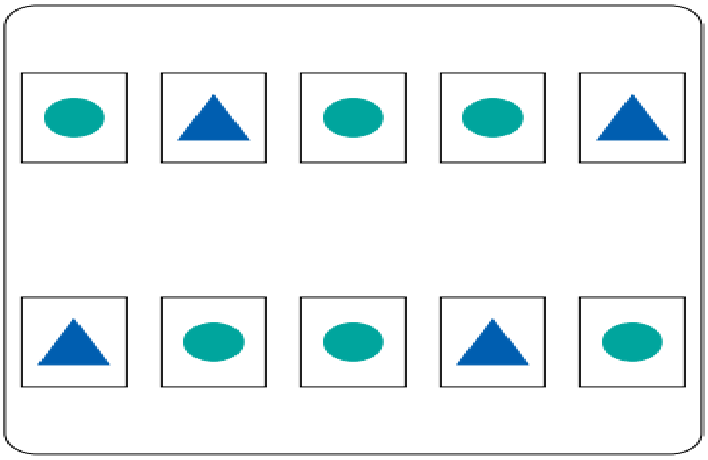
$P(E)$: Probabilidade do evento E;

$N(E)$: Número de elementos do evento;

$N(S)$: Número de elementos do espaço amostral.

Questões Propostas

1. (Projeto um livro aberto. Adaptado) De um grupo de 10 estudantes, um será sorteado para ser o representante de turma. Como são 4 meninas e seis meninos, decidiu-se, para fazer o sorteio, representar as meninas por cartões ilustrados com triângulos e os meninos por cartões ilustrados com círculos, como na figura abaixo. Os cartões foram colocados numa caixa e um será sorteado.



a) Qual é a probabilidade de ser escolhida uma menina como representante de turma? Porque?

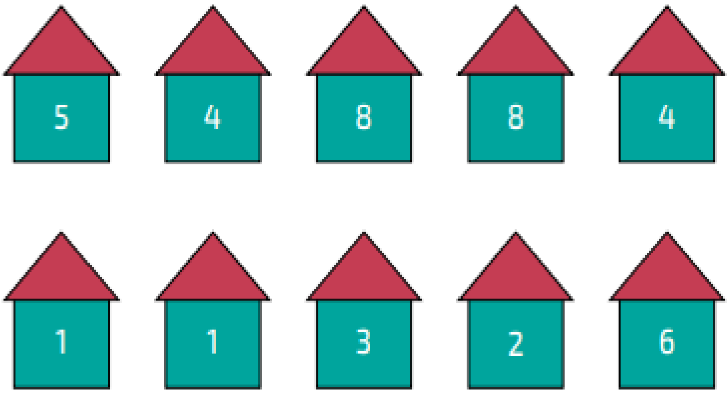
b) Qual é a probabilidade de ser escolhido um menino como representante de turma? Porque?

2. (Livro SAE digital. Adaptado). Em um bingo, cada cartela contém números de 1 a 75. A cada rodada, um número é sorteado e o jogador verifica se ele está em sua cartela.

a) Qual é a probabilidade de ser sorteado aleatoriamente um número múltiplo de cinco?

b) Qual é a probabilidade de ser sorteado aleatoriamente um número múltiplo de três e de cinco?

3. (Projeto livro aberto. Adaptado). Numa rua há 10 casas. O número de moradores por casa está representado na figura abaixo. Suponha que você irá escolher ao acaso uma casa desta rua.



a) Qual é a probabilidade de que a casa escolhida tenha exatamente 4 moradores? Por quê?

b) Qual é a probabilidade de que a casa escolhida tenha mais de 4 moradores? Por quê?

4. (Livro SAE digital). Marcelo possui as peças de roupas e os pares de sapato mostrados a seguir e deseja escolher uma combinação para ir a uma festa

a) De quantas maneiras distintas Marcelo pode se vestir escolhendo uma camiseta, uma calça e um sapato?

b) Qual é a probabilidade de Marcelo escolher aleatoriamente uma camiseta vermelha, uma calça e um par de sapatos?

c) Marcelo comprou mais uma calça. Assim, a probabilidade de ele escolher aleatoriamente uma camiseta vermelha, uma calça e um par de sapatos é menor, maior ou igual ao resultado obtido no item anterior? Por quê?

5. Jogamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de que o total de pontos seja igual a 10?

a) 1/12 b) 1/11 c) 1/10 e) 2/23 f) 1/6

6. (Livro SAE digital). Observe a imagem abaixo, que representa um dado cujas faces estão numeradas de 1 a 12. Qual é a probabilidade aproximada de lançar o dado uma vez e sair um número par e menor do que 10?

7. Um shopping estava oferecendo cupons para o sorteio de um carro. Ao todo, cada uma das 30 lojas dispunha de 100 cupons. Guilherme realizou muitas compras e preencheu 20 cupons, depositando todos eles em uma urna. Qual é a probabilidade de ele ganhar o carro no sorteio?

8) Escreva o espaço amostral do lançamento sucessivo de duas moedas preenchendo a tabela de dupla entrada abaixo:

Lançamento de duas moedas	Cara (C)	Coroa (K)
Cara (C)		
Coroa (K)		

a) Qual a probabilidade de sair duas caras?

b) Qual a probabilidade de sair duas coroas?

9) Uma moeda é lançada três vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos:

a) Exatamente uma cara?

b) Duas caras e uma coroa?

3.7 . ATIVIDADE 5. Adaptada da dissertação de Soares (2018).

Título: **Variação de Probabilidade**

Objetivo: Descobrir o intervalo de variação da probabilidade de um evento.

Material: Roteiro da atividade, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Consideremos o seguinte experimentos:

		EVENTOS				**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**				**PROBABILIDADES DO EVENTOS**			
Experimento	Espaço Amostral	Evento A	Evento B	Evento C	Evento D	A	B	C	D	P(A)	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$
A) Lançar uma moeda uma única vez e observar a face voltada para cima	{Cara, Coroa}	Sair Cara e Coroa.	Sair Cara	Sair Coroa.	Sair Cara ou Coroa								

B) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima	1,2,3,4,5, 6	Sair o número zero.	Sair o número 2.	Sair número par.	Sair número entre zero(0) e sete(7).								
C) Colocamos uma bola verde e uma Azul num saco, extraímos uma aleatoriamente e observamos sua cor.	{Verde, Azul}	Sair bola Branca.	Sair bola Verde.	Sair bola Azul.	Sair bola verde ou azul.								

D) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima	1,2,3,4,5, 6	Obter número 0.	Obter número par.	Obter número ímpar.	Obter número entre 0 e 7.								
E) Em uma urna há 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 7 bolas vermelhas. Retirando uma bola ao acaso;	Sair bola vermelha **e** branca;	Sair bola branca;	Sair bola preta;	Sair bola branca **ou** preta **ou** vermelha									

F) Em uma urna há 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 7 bolas vermelhas. Retirando uma bola ao acaso;	Sair bola vermelha **e** preta	Sair bola branca **ou** preta	Sair bola branca **ou** vermelha	Sair bola branca **ou** preta **ou** vermelha									

Observação:____

Conclusão:____

Questões Propostas

01) Um dado é lançado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima. Qual a probabilidade de esse número ser:

a) maior que 6?

b) menor que 3?

c) maior ou igual a 3?

d) maior que zero(0) e menor 7?

e) o número 1? O número 2? O número 3? O número 4? O número 5? O número 6?

e) Qual é o valor da soma:

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como dito antes, o objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática para o ensino de probabilidade por meio de atividades com uma abordagem sobre os aspectos conceituais e sobre a resolução de questões envolvendo o assunto, com o intuito de favorecer a participação dos alunos em aulas de matemática e o aprendizado dos conceitos presentes em cada atividade. A perspectiva é que o professor ou professora do Ensino Fundamental possa utilizar a sequência didática deste trabalho em suas aulas para o ensino de Probabilidade, adaptando para sua realidade local.

A expectativa é que a aplicação das atividades exerça uma influência positiva no aprendizado dos discentes, uma vez que os mesmos terão a possibilidade de registrar em suas observações e conclusões conhecimentos adquiridos no desenvolvimento e preenchimento das atividades, bem como na resolução das questões propostas. Tendo o ensino de matemática por atividades como mais um recurso didático que pode ser usado para superar as dificuldades relacionadas à aprendizagem deste conteúdo.

O processo de ensino-aprendizagem de probabilidade apresenta dificuldades que precisam ser reconhecidas e trabalhadas pelos docentes, de forma a construir uma educação de melhor qualidade. Para tal fim, elencamos algumas orientações didáticas que, de acordo com Soares (2018), podem ser consideradas no momento da aplicação da sequência didática, frisando o êxito na aplicação das cinco atividades em sala de aula. Considerando os momentos de uma aula de matemática por meio de Atividade Experimental: **organização, apresentação, execução, análise e institucionalização**

Na aplicação das atividades, deve-se orientar os alunos quanto a leitura e a interpretação de forma atenta dos enunciados dos eventos em cada situação. Assim, **na atividade I**, sobre experimentos aleatórios e determinísticos, para que os discentes percebam as diferenças nos acontecimentos de cada um dos eventos pode-se fazer questionamentos a respeito dos eventos contidos no quadro sobre seu acontecimento ou não, instigando os estudantes a pensarem em variadas situações envolvendo experimentos determinísticos e não determinísticos. (SOARES, 2018).

Na atividade II, sobre espaço amostral, auxiliar os estudantes na identificação e representação dos eventos por meio da notação de conjuntos e do número de elementos de cada conjunto; orientar os discentes para que fiquem atentos quanto as diferenças existentes em lançamentos consecutivos de moedas e dados e suas possibilidades de resultados como um par ordenado, uma terna ordenada, etc.; auxiliando-os na formalização e sistematização do conceito de espaço amostral. (SOARES, 2018).

Na atividade III, sobre eventos, auxiliar os estudantes na identificação e representação dos eventos por meio da notação de conjuntos e do número de elementos de cada conjunto ou subconjunto; após o preenchimento do quadro pelos estudantes, socializar com os mesmos o conceito de eventos por meio de subconjuntos de um conjunto e do número de elementos destes conjuntos, contribuindo para entendimento e aprendizado do conceito pelo estudantes; auxiliar os estudantes na formalização e sistematização do conceito de eventos de um espaço amostral. (SOARES, 2018).

Na atividade IV, sobre o conceito da probabilidade clássica, orientar os estudantes para a identificação e representação das possibilidades dos eventos e do número de elementos dos eventos em cada pergunta; instigando-os para que observem as regularidades presentes no desenvolvimento da atividade; após o preenchimento do quadro pelos estudantes, socializar com os mesmos o conceito clássico de probabilidade de um evento desejado por meio da razão entre o número de casos desejados pelo número de casos possíveis; apresentar aos estudantes a formalização e sistematização do conceito clássico de probabilidade por meio da razão entre o número de casos desejados e o número de casos possíveis. (SOARES, 2018)

Na atividade V, sobre o intervalo de variação da probabilidade, orientar os estudantes sobre identificação e representação das possibilidades dos eventos A, B, C e D em cada situação e para o cálculo das probabilidades dos eventos; direcionando-os para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade; orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões e socializarem com a turma; apresentar aos estudantes a formalização, sistematização do intervalo de variação da probabilidade. (SOARES, 2018).

Sendo assim, com as orientações pedagógicas citadas acima, esperamos que a sequência didática proposta neste trabalho auxilie os docentes no ensino da probabilidade no 8º ano do Ensino Fundamental. Contribuindo com o desenvolvimento cognitivo dos educandos, pois o sucesso de nossos alunos representa o bom trabalho realizado pelos docentes. Visando sempre a construção de uma educação melhor qualidade.

.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Poliana Ribeiro dos Santos. **O Conceito e o Ensino de Probabilidade nos 8º e 9º Anos**: análises e sugestões.2016.122f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Programa de Pós Graduação em Matemática, Campina Grande- PB,2016.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB: documento de referência do ano de 2001. Brasília, DF: INEP, 2020.

BRASIL, Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Ministério da Educação, disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br.

BRASIL (1998). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em:<http:portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/matemática.pdf>. Acesso em 27 de outubro de 2016.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**; tradução: Hygino H. Domingues.-Campinas, SP: Editora da Unicamp,2004.

FONSECA, Jairo Simon; MARTINS, Gilberto de Andrade. **Curso de Estatística**. -6. ed.-16. Reimpr.- São Paulo: Atlas, 2013.

GADELHA, Augusto. **Uma pequena história da probabilidade**. Curso de Pós-Graduação em Estatística. DME/IM/UFRJ, 2004.

GIOVANNE JUNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática**. 8º: ensino fundamental: anos finais.4ª edição. - São Paulo: FTD, 2018.

LANDIN, Flávia et. Al. **Probabilidade. Projeto livro aberto de matemática.** Coordenação Fabio Simas, Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br). Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Editora: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS). Ano/ Versão: 2020 / versão 1.2 de 17 de novembro de 2020.

MENDES, Iran Abreu; SÁ, Pedro Franco de. **Matemática por Atividade:** sugestões para a sala de aula. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MEYER, Paul L. Probabilidade: **Aplicações à Estatística**. 2ª edição. LTC Editora. Rio de Janeiro-RJ. 2009.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª edição. Editora SBM. Rio de Janeiro-RJ. 2006.

MORGADO, Augusto César; TEIXEIRA, Ralph Costa. **Introdução à Teoria da Probabilidade.** II Colóquio de Matemática do Centro Oeste. 07-11/11/2011. Realizado na UFMT. Cuiabá. 2011.

MORAES, Luís Cláudio Longo. **Ensino de probabilidade: historicidade e interdisciplinaridade**.2014.130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica-RJ,2014.

PARÁ, Secretaria de Estado de Educação. Documento Curricular do Estado do Pará. **Educação Infantil e Ensino Fundamental**. 2ª Edição. PA.2019.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio José da Costa. A engenharia didática: **alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos**. In: MARCONDES, Maria Inês, OLIVEIRA, Ivanilde Apoluceno de, TEIXEIRA, Elizabeth (Org.). Abordagens Teóricas e Construções Metodológicas na Pesquisa em Educação – Belém:EDUEPA, 2011.p.145-160.

SÁ, Pedro Franco de Sá. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades** / Pedro Franco de Sá; coordenado por Demetrius Gonçalves de Araújo, Glauco Lira Pereira, Raimundo Otoni Melo Figueiredo e Reginaldo da Silva. Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I).

SAE, 8. Ano: **Matemática. 8. ano**: livro do professor: livro I/ SAE DIGITAL S/A. – 1.ed. – Curitiba,PR: SAE DIGITAL S/A, 2021.

SOARES, Marcel Brito. **O ensino de probabilidade por atividades.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Universidade do Estado do Pará. Belém,2018.

SOARES, Marcel Brito. **Uma sequência didática para o ensino de probabilidade.** 2018. 92f. Produto da Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Belém, 2018.

SOUZA, Josie Pacheco de Vasconcellos. Sala de Aula Invertida: **uma proposta para o ensino de probabilidade**. 2019.174f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), Campos dos Goytacases - RJ,2019.